

5C – Butelki

autor zadania: Mateusz Radecki

Treść

Dane są pojemności trzech butelek oraz objętości płynów znajdujących się w nich na starcie. W jednym ruchu możemy wybrać dwie butelki i przelewać płyn z pierwszej do drugiej tak długo, aż w pierwszej skończy się płyn, lub w drugiej skończy się miejsce, którekolwiek pierwsze się stanie. Dla każdej objętości należy stwierdzić, po jakiej minimalnej liczbie przełań możemy mieć butelkę, w której znajduje się dokładnie tyle płynu.

Rozwiązanie

Oznaczmy pojemności butelek przez A , B i C , gdzie $A \leq B \leq C$. Zauważmy, że sumaryczna objętość płynu we wszystkich trzech butelkach jest stała. Zastanówmy się, co możemy wywnioskować z faktu, że wykonaliśmy chociaż jedno przełanie. Oznacza to, że przynajmniej jedna z butelek jest pełna lub pusta. Mamy zatem 6 możliwych przypadków. Zauważmy, że w każdym z nich, znamy dokładną sumaryczną objętość w płynie w pozostałych dwóch butelkach. Powiedzmy, że pojemności tych butelek to X oraz Y , a sumaryczna objętość płynu w nich to s . Ile istnieje sposobów na rozmieszczenie tylu litrów płynu w obu butelkach z założeniem, że liczba litrów w każdej butelce musi być liczbą całkowitą? Dokładny wzór mógłby nieco odstraszać, jednak ważnym jest, że jest to co najwyżej $X + 1$. Oznacza to, że możliwych kombinacji mówiących ile litrów płynu jest w danym momencie w każdej butelce, jest co najwyżej liniowo wiele! Możemy zatem użyć algorytmu BFS, gdzie stanem jest liczba litrów płynu w każdej butelce. Nie musimy się martwić o odpowiednią reprezentację stanu, czyli opisywanie go poprzez mówienie która butelka jest pusta lub pełna i tym podobne. Wiedząc to, co wcześniej wykazaliśmy wiemy, że algorytm BFS odwiedzi co najwyżej liniowo wiele różnych stanów. Używając odpowiedniej struktury danych (na przykład haszmapy), możemy spamiętywać w których stanach już byliśmy i wykonać poprawne przeszukiwanie grafu wszerek. Znając liczbę ruchów potrzebnych na dojście do każdego osiągalnego stanu, znamy również liczbę ruchów potrzebnych do otrzymania butelki z konkretną liczbą litrów płynu w środku.

Zależnie od wybranej struktury danych nasz algorytm BFS może działać w złożoności $\mathcal{O}(C \cdot \log(C))$ lub nawet $\mathcal{O}(C)$.