

Sum 解题报告

罗雨屏

清华大学 交叉信息研究院

2014 年 12 月 16 日

题目描述

- 给定 n, r , 求

$$\sum_{d=1}^n (-1)^{\lfloor \sqrt{d \times r \times d} \rfloor}$$

- 10^4 组询问, $n \leq 10^9, r \leq 10^4$

分数分布



题目算法

- 如果 r 为完全平方数，直接做即可
- 令 $x = \sqrt{r}$
- $x > 2$ 是没有意义的
 - 更进一步 $x > 1$ 是没有意义的

$$(-1)^{\lfloor dx \rfloor} = -(-1)^{\lfloor d(2-x) \rfloor}$$

题目算法 Cont'd

- 令 $y = 1/x$
- 在数轴上交替染色，区间 $[0, y)$ 为红色， $[y, 2y)$ 为蓝色
- 答案为： $[1, n]$ 中红色整点数目 - $[1, n]$ 中蓝色整点数目
- 覆盖了 n 这个整点的区间不一定完整，但其内的整点数目及颜色可以算出
 - 只需考虑区间全被包含的情况
- 奇数个整区间：最后一个区间内的整点数可以暴力算
- 只考虑偶数个整区间

题目算法 Cont'd

- 每个整区间内至少有 $\lfloor y \rfloor$ 个整点
- 现在只有偶数个整区间：把这 $\lfloor y \rfloor$ 个点全部去掉

-

$$y \rightarrow y - \lfloor y \rfloor = \{y\}$$

-

$$n \rightarrow \lfloor \{y\}n/y \rfloor$$

复杂度分析

- 注意到

$$y > 1 \Rightarrow 2\{y\} < y$$

- 故

$$2n' < n$$

- 指数级下降, 复杂度 $O(\log n)$

算法 2

- 注意到只需要知道 $\lfloor dx \rfloor$ 是否是偶数即可
- $\lfloor dx \rfloor$ 为偶数, 当且仅当

$$\lfloor dx \rfloor = 2\lfloor dx/2 \rfloor$$

- 所以原题转为

$$\sum_{d=1}^n (4\lfloor dx/2 \rfloor - 2\lfloor dx \rfloor + 1) = n + 4 \sum_{d=1}^n \lfloor dx/2 \rfloor - 2 \sum_{d=1}^n \lfloor dx \rfloor$$

- 经典问题, 类欧几里得算法

奇怪的问题

- 蛤蛤蛤

```
In[23]:= N[17 884 436 * Sqrt[33], 20]
```

```
Out[23]= 1.0273826299999999513 × 108
```

- long double 大法好
- 一开始的数据范围是 $n \leq 10^{18}$ 于是会有更严重的精度问题
 - 所有操作均可以用整数实现
- 解决方法：把数保存成 $\frac{a\sqrt{r} + b}{c}$ 这种形式

终极解决方案

```
ln[24]:= dfs[n_, x_] := Module[{nn = n, ret = 0, xp, lx, bs, yp, sgn},
  xp = x - Floor[x / 2] * 2;
  If[xp < 1, y = 1 / xp; sgn = 1, y = 1 / (2 - xp); sgn = -1];
  bs = Floor[nn / y];
  If[bs == 0, nn * sgn,
    lx = Floor[bs * y];
    If[OddQ[bs], ret -= nn - lx, ret += nn - lx];
    nn = lx;
    If[OddQ[bs], lx = Floor[(bs - 1) * y]; ret += nn - lx; nn = lx; bs -= 1];
    yp = y - Floor[y];
    Return [(ret + dfs[Floor[bs * yp], 1 / yp]) * sgn];]
• ]
```