《数树》试题讨论

laofu

清华大学交叉信息研究院

January 29, 2019

大致题意

令 n 个点的所有树的集合为 S。
两棵 n 个点的树的贡献为 $y^{n-\text{两棵树重复边条数}}$。

- Question0 给两棵树求贡献。
- Question1 给一棵树，对于另一棵树的所有方案，求贡献之和。
- Question2 对于两棵树的所有方案，求贡献之和。

得分情况

留坑

冤有头，债有主

命题人：陈江伦
Question1 第一类标算：陈江伦
Question1 第二类标算：吕欣
Question2 标算：张瀚文
验题人：张瀚文
讲题人：吴凯路

吐槽

吐槽

- 出题人跑路啦！让凯路老哥临时背锅上阵。

吐槽

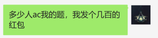
- 出题人跑路啦！让凯路老哥临时背锅上阵。
- 本来觉得想放一道让大家拿分的好题，结果看了看其它两道题发现我的题目可能是最难的？

吐槽

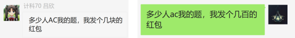
- 出题人跑路啦！让凯路老哥临时背锅上阵。
- 本来觉得想放一道让大家拿分的好题，结果看了看其它两道题发现我的题目可能是最难的？
- 不过细想这题还是一道很有趣的数数题呢。（数数之王~~修涵~~笑了）

吐槽

- 出题人跑路啦！让凯路老哥临时背锅上阵。
- 本来觉得想放一道让大家拿分的好题，结果看了看其它两道题发现我的题目可能是最难的？
- 不过细想这题还是一道很有趣的数数题呢。(数数之王~~修涵~~笑了)
- 



吐槽

- 出题人跑路啦！让凯路老哥临时背锅上阵。
- 本来觉得想放一道让大家拿分的好题，结果看了看其它两道题发现我的题目可能是最难的？
- 不过细想这题还是一道很有趣的数数题呢。（数数之王~~修涵~~笑了）
- 

- 

第 1 个测试点

集训队分值：2，非集训队分值：18

~~爆搜所有本质不同的染色方案。~~

我们把两棵树所有的公共边连到图中，看形成了多少个连通块，答案就是 y 的连通块个数次幂。

第 1 个测试点

集训队分值：2，非集训队分值：18

~~爆搜所有本质不同的染色方案。~~
我们把两棵树所有的公共边连到图中，看形成了多少个连通块，答案就是 y 的连通块个数次幂。
什么，你爆零了？

第 2, 3 个测试点

集训队分值：2×2，非集训队分值：2×5

用 std::map 即可求出答案。（好像和测试点 1 没啥区别）
复杂度 $O(n \log n)$。
$op = 0$ 其实是给大家理性愉悦一下的。

第 2, 3 个测试点

集训队分值：2×2，非集训队分值：2×5

用 std::map 即可求出答案。（好像和测试点 1 没啥区别）
复杂度 $O(n \log n)$。
$op = 0$ 其实是给大家理性愉悦一下的。
什么，你不会 map?
哈希总会吧（雾）

第 10 个测试点

集训队分值：1，非集训队分值：4

$y = 1$，任意一棵树的贡献都是 1。
输出 n^{n-2} 即可。

第 10 个测试点

集训队分值：1，非集训队分值：4

$y=1$，任意一棵树的贡献都是 1。
输出 n^{n-2} 即可。
什么？你不会模意义下的乘法？

第 4 个测试点

集训队分值：1，非集训队分值：4

$n = 3$

第 4 个测试点

集训队分值：1，非集训队分值：4

$n = 3$

输出 $y + 2 \times y^2$ 即可。

第 4 个测试点

集训队分值：1，非集训队分值：4

$n = 3$

输出 $y + 2 \times y^2$ 即可。

什么？你不会 cout？

第 5 个测试点

集训队分值：1，非集训队分值：4

$n = 5$

第 5 个测试点

集训队分值：1，非集训队分值：4

$n = 5$
爆搜所有的红树，求出答案即可。

第 5 个测试点

集训队分值：1，非集训队分值：4

$n = 5$

爆搜所有的红树，求出答案即可。

什么？你不会爆搜？

第 6, 7 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

$n \leq 500$

第 6,7 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

$n \leq 500$

我们把 y 稍稍转化一下，相当于是如果红树和蓝树一共有 k 条重复边，则放数的方案数是 $y^n \times y^{-k}$。即每重复选一条边，贡献就要乘上一个 y^{-1}，最后再把答案乘上一个 y^n 就可以了。

接下来所有式子中的 y 都看成读入的 y 的逆元。

第 6, 7 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

$n \leq 500$

我们把 y 稍稍转化一下，相当于是如果红树和蓝树一共有 k 条重复边，则放数的方案数是 $y^n \times y^{-k}$。即每重复选一条边，贡献就要乘上一个 y^{-1}，最后再把答案乘上一个 y^n 就可以了。

接下来所有式子中的 y 都看成读入的 y 的逆元。

此时蓝树是固定的，红树每选一条蓝树的边，贡献就乘上 y。

相对于是完全图中，蓝树的每一条边对应完全图中的一条 y 重边。

根据 Matrix-Tree 定理，令蓝树的度数矩阵为 D，蓝树的邻接矩阵为 E，T 为对角线为 0，其它位置全部为 1 的矩阵，则答案为 $|(n-1)I + (y-1)D - (T + (y-1)E)|$ 去掉一行一列的行列式。

第 6, 7 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

$n \leq 500$

我们把 y 稍稍转化一下，相当于是如果红树和蓝树一共有 k 条重复边，则放数的方案数是 $y^n \times y^{-k}$。即每重复选一条边，贡献就要乘上一个 y^{-1}，最后再把答案乘上一个 y^n 就可以了。

接下来所有式子中的 y 都看成读入的 y 的逆元。

此时蓝树是固定的，红树每选一条蓝树的边，贡献就乘上 y。

相对于是完全图中，蓝树的每一条边对应完全图中的一条 y 重边。

根据 Matrix-Tree 定理，令蓝树的度数矩阵为 D，蓝树的邻接矩阵为 E，T 为对角线为 0，其它位置全部为 1 的矩阵，则答案为 $|(n-1)I + (y-1)D - (T + (y-1)E)|$ 去掉一行一列的行列式。

什么？你不会 Matrix-Tree？

第 6,7 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

$n \leq 500$

我们把 y 稍稍转化一下，相当于是如果红树和蓝树一共有 k 条重复边，则放数的方案数是 $y^n \times y^{-k}$。即每重复选一条边，贡献就要乘上一个 y^{-1}，最后再把答案乘上一个 y^n 就可以了。

接下来所有式子中的 y 都看成读入的 y 的逆元。

此时蓝树是固定的，红树每选一条蓝树的边，贡献就乘上 y。

相对于是完全图中，蓝树的每一条边对应完全图中的一条 y 重边。

根据 Matrix-Tree 定理，令蓝树的度数矩阵为 D，蓝树的邻接矩阵为 E，T 为对角线为 0，其它位置全部为 1 的矩阵，则答案为 $|(n-1)I+(y-1)D-(T+(y-1)E)|$ 去掉一行一列的行列式。

什么？你不会 Matrix-Tree？

什么？你不会高斯消元？

第 $11, 12, 13, 14$ 个测试点（方法一）

集训队分值：5×4，非集训队分值：2×4

刚刚这个矩阵长得很有性质。

$$|(n-1)I + (y-1)D - (T + (y-1)E)|$$

第 11, 12, 13, 14 个测试点（方法一）

集训队分值：5×4，非集训队分值：2×4

刚刚这个矩阵长得很有性质。

$|(n-1)I+(y-1)D-(T+(y-1)E)|$

这个矩阵能不能快速求行列式呢？

拿最后一行消一次其它所有行。矩阵的中间就只剩下了对角线上的元素、蓝树的邻接矩阵、最后一行及最后一列。

第 11, 12, 13, 14 个测试点（方法一）

集训队分值：5×4，非集训队分值：2×4

刚刚这个矩阵长得很有性质。

$|(n-1)I + (y-1)D - (T + (y-1)E)|$

这个矩阵能不能快速求行列式呢?

拿最后一行消一次其它所有行。矩阵的中间就只剩下了对角线上的元素、蓝树的邻接矩阵、最后一行及最后一列。

行列式的定义：$\sum_{\sigma \in P_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

第 $11, 12, 13, 14$ 个测试点（方法一）

集训队分值：5×4，非集训队分值：2×4

刚刚这个矩阵长得很有性质。

$|(n-1)I + (y-1)D - (T + (y-1)E)|$

这个矩阵能不能快速求行列式呢？

拿最后一行消一次其它所有行。矩阵的中间就只剩下了对角线上的元素、蓝树的邻接矩阵、最后一行及最后一列。

行列式的定义：$\sum_{\sigma \in P_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

这个定义代表什么意义呢？一个排列得含义是把 $1 \dots n$ 分解为若干个环。

取对角线上的元素等价于取一个自环，取邻接矩阵的元素只能构成树上一条路径，不能构成长度 > 2 的环。所以任意一个长度 > 2 的自环一定都是树上一条路径加上最后一行或一列的元素。并且最多取一条这样的一个环。

那么就可以转化为一个树形 DP 问题。复杂度 $O(n)$。

什么？你又不会求行列式？

第 8, 9 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

利用组合恒等式：

$$y^k = (y-1+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (y-1)^i$$

对于两棵有 k 条重边的树，贡献是 y^k。
这个式子的含义：枚举 n 个点的完全图的所有边的子集 E，如果 E 同时是两棵树的边的子集，则贡献为 $(y-1)^{|E|}$，否则为 0。这样所有子集 E 的贡献之和恰好是 y^k。

第 8,9 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

我们钦定一些蓝树的边为红树的边，假设这些边把 n 个点划分成了 m 个连通块，那么红树方案数为

$$= \sum_{\sum_{i=1}^{m} d_i = 2(m-1)} (m-2)! \prod_{i=1}^{m} \frac{a_i^{d_i}}{(d_i - 1)!}$$

$$= \sum_{\sum_{i=1}^{m} d_i = m-2} (m-2)! \prod_{i=1}^{m} \frac{a_i^{d_i+1}}{d_i!} = n^{m-2} \prod_{i=1}^{m} a_i$$

用 $f[i][j]$ 表示以 i 为根的子树中，钦定一些边蓝树和红树相同，把其它的边删掉之后 i 所在的连通块大小为 j，的所有方案乘上 $(y-1)^{\text{保留边的数量}}$ 再乘上带权方案数之和。
复杂度 $O(n^2)$。

第 $11, 12, 13, 14$ 个测试点（方法二）

集训队分值：5×4，非集训队分值：2×4

$$\sum_{\sum_{i=1}^{m} d_i = m-2} (m-2)! \prod_{i=1}^{m} \frac{a_i^{d_i+1}}{d_i!} = n^{m-2} \prod_{i=1}^{m} a_i$$

观察这个式子，$\prod_{i=1}^{m} a_i$ 的组合意义是什么？钦定红树一些边后，在每个连通块内找一个关键点的方案数。

在 DP 时改为 $f[i][0\backslash 1]$，记录 i 所在的连通块内是否已经选出了一个关键点。

复杂度 $O(n)$。

第 11, 12, 13, 14 个测试点（方法二）

集训队分值：5×4，非集训队分值：2×4

$$\sum_{\sum_{i=1}^{m} d_i = m-2} (m-2)! \prod_{i=1}^{m} \frac{a_i^{d_i+1}}{d_i!} = n^{m-2} \prod_{i=1}^{m} a_i$$

观察这个式子，$\prod_{i=1}^{m} a_i$ 的组合意义是什么？钦定红树一些边后，在每个连通块内找一个关键点的方案数。

在 DP 时改为 $f[i][0\backslash 1]$，记录 i 所在的连通块内是否已经选出了一个关键点。

复杂度 $O(n)$。

什么？你又不会组合意义？

第 15 个测试点

集训队分值：1，非集训队分值：4

$n = 3$。
答案肯定是一个关于 y 的 $n-1$ 次多项式。
爆搜出这个多项式即可

第 15 个测试点

集训队分值：1，非集训队分值：4

$n=3$。
答案肯定是一个关于 y 的 $n-1$ 次多项式。
爆搜出这个多项式即可
什么，你不会爆搜？

第 16 个测试点

集训队分值：1，非集训队分值：4

$n = 10$。
10 个点的无标号树的数量只有 106 个。
爆搜一下，然后跑一跑 Question1。

第 16 个测试点

集训队分值：1，非集训队分值：4

$n = 10$。
10 个点的无标号树的数量只有 106 个。
爆搜一下，然后跑一跑 Question1。
什么？你又不会爆搜？

第 17, 18 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

利用组合恒等式：

$$y^k = (y-1+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (y-1)^i$$

对于两棵有 k 条重边的树，贡献是 y^k。
这个式子的含义：枚举 n 个点的完全图的所有边的子集 E，如果 E 同时是两棵树的边的子集，则贡献为 $(y-1)^{|E|}$，否则为 0。这样所有子集 E 的贡献之和恰好是 y^k。

第 17, 18 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

钦定一个边集 E 中的边两棵树都必须选，两棵树剩下的边任意。
用 $g(E)$ 表示包含边集 E 的生成树个数，那么，答案就是
$\sum_E (y-1)^{|E|} g(E)^2$。
对于一个边集 E，假设它把 n 个点分成了 m 个集合，第 i 个集合的大小是 a_i。

第 17, 18 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

钦定一个边集 E 中的边两棵树都必须选，两棵树剩下的边任意。
用 $g(E)$ 表示包含边集 E 的生成树个数，那么，答案就是
$\sum_E (y-1)^{|E|} g(E)^2$。
对于一个边集 E，假设它把 n 个点分成了 m 个集合，第 i 个集合的大小是 a_i。
根据树的 Prufer 序列，包含 E 的生成树个数

$$= \sum_{\sum_{i=1}^m d_i = 2(m-1)} (m-2)! \prod_{i=1}^{m} \frac{a_i^{d_i}}{(d_i-1)!}$$

$$= \sum_{\sum_{i=1}^m d_i = m-2} (m-2)! \prod_{i=1}^{m} \frac{a_i^{d_i+1}}{d_i!} = n^{m-2} \prod_{i=1}^{m} a_i$$

第 17, 18 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

第 17, 18 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

用 $ans[l]$ 表示两棵树钦定某 l 条边必须选的方案数，令 $m = n - l$。

$$ans[l] = \sum_{\sum_{i=1}^{m} a_i = n} \frac{n! \prod_{i=1}^{m} \frac{a_i^{a_i-2}}{a_i!}}{m!} \times \left(n^{m-2} \prod_{i=1}^{m} a_i\right)^2$$

$$= \sum_{\sum_{i=1}^{m} a_i = n} \frac{n! n^{2(m-2)} \prod_{i=1}^{m} \frac{a_i^{a_i}}{a_i!}}{m!}$$

DP 出 ans，答案就是 $\sum_{i=0}^{n-1} ans[i](y-1)^i$。复杂度 $O(n^3)$。

第 17, 18 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

用 $ans[l]$ 表示两棵树钦定某 l 条边必须选的方案数，令 $m=n-l$。

$$ans[l]=\sum_{\sum_{i=1}^{m}a_i=n}\frac{n!\prod_{i=1}^{m}\frac{a_i^{a_i-2}}{a_i!}}{m!}\times\left(n^{m-2}\prod_{i=1}^{m}a_i\right)^2$$

$$=\sum_{\sum_{i=1}^{m}a_i=n}\frac{n!n^{2(m-2)}\prod_{i=1}^{m}\frac{a_i^{a_i}}{a_i!}}{m!}$$

DP 出 ans，答案就是 $\sum_{i=0}^{n-1}ans[i](y-1)^i$。复杂度 $O(n^3)$。

什么？你不会 DP？

第 19, 20 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

乘上容斥系数之后，答案的表达式就为
$\sum_{\sum_{i=1}^{m} a_i \le n-2} (y-1)^{n-m} n^{2(m-2)} \prod_{i=1}^{m} \binom{(\sum_{j=1}^{i} a_j)-1}{a_i - 1} a_i^{a_i}$
根据计算式我们可以很容易得到一个动态规划转移方程：

$$f[k] = \begin{cases} (y-1)^{-1} \times \sum_{i=1}^{k} \frac{i^i \times n^2 \times f[k-i]}{k \times (i-1)!} & k > 0 \\ (y-1)^n \times n! \times n^{-4} & k = 0 \end{cases}$$

这样可以在 $O(n^2)$ 的时间内求出答案。

第 19, 20 个测试点

集训队分值：6×2，非集训队分值：4×2

乘上容斥系数之后，答案的表达式就为

$\sum_{\sum_{i=1}^{m} a_i \le n-2} (y-1)^{n-m} n^{2(m-2)} \prod_{i=1}^{m} \binom{(\sum_{j=1}^{i} a_j)-1}{a_i-1} a_i^{a_i}$

根据计算式我们可以很容易得到一个动态规划转移方程：

$$f[k] = \begin{cases} (y-1)^{-1} \times \sum_{i=1}^{k} \frac{i^i \times n^2 \times f[k-i]}{k \times (i-1)!} & k > 0 \\ (y-1)^n \times n! \times n^{-4} & k = 0 \end{cases}$$

这样可以在 $O(n^2)$ 的时间内求出答案。

什么？你又不会 DP?

第 22, 23, 24, 25 个测试点

集训队分值：5 × 4，非集训队分值：2 × 4

令 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} f[i]x^i, g(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^i}{(i-1)!}x^i$，则

$$f'x=(y-1)n^2fg$$

$$\frac{f'}{f}=\frac{(y-1)n^2g}{x}$$

$$\ln(f)=\int\frac{(y-1)n^2g}{x}dx \Rightarrow f=e^{\int\frac{(y-1)n^2g}{x}dx}$$

第 $22, 23, 24, 25$ 个测试点

集训队分值：5×4，非集训队分值：2×4

令 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f[i]x^i, g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^i}{(i-1)!}x^i$，则

$$f'x = (y-1)n^2 fg$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{(y-1)n^2 g}{x}$$

$$\ln(f) = \int \frac{(y-1)n^2 g}{x} dx \Rightarrow f = e^{\int \frac{(y-1)n^2 g}{x} dx}$$

复杂度 $O(n \log n)$。

第 $22, 23, 24, 25$ 个测试点

集训队分值：5×4，非集训队分值：2×4

令 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f[i]x^i, g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^i}{(i-1)!} x^i$，则

$$f' x = (y-1)n^2 fg$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{(y-1)n^2 g}{x}$$

$$\ln(f) = \int \frac{(y-1)n^2 g}{x} dx \Rightarrow f = e^{\int \frac{(y-1)n^2 g}{x} dx}$$

复杂度 $O(n \log n)$。
什么？你不会多项式 exp？

小码量的清新题

本题除去多项式运算之外的代码

```cpp
void dfs(int k) {
    vis[k]=true;
    f1[k]=f0[k]=1;
    for (int t:e[k]) if (!vis[t]) {
        dfs(t);
        f1[k]=((1LL*f0[k]*f1[t]+1LL*f1[k]*f0[t])%mod*y+1LL*f1[k]*f1[t]%mod*n)%mod;
        f0[k]=(1LL*f0[k]*f0[t]%mod*y+1LL*f0[k]*f1[t]%mod*n)%mod;
    }
}
int main()
{
    int op,i,a,b,ans,fac;static int f[N],g[N];
    gi(n),gi(y),gi(op);
    if (!op) {
        set<PR>G;
        for (i=1;i<n;i++)
            gi(a),gi(b),G.insert(mp(min(a,b),max(a,b)));
        for (i=1,ans=n;i<n;i++)
            gi(a),gi(b),ans-=G.count(mp(min(a,b),max(a,b)));
        print(qpow(y,ans));
    } else {
        int w=qpow(y,n);
        y=qpow(y,mod-2)-1;
        if (op==1) {
            for (i=1;i<n;i++) {
                gi(a),gi(b);
                e[a].pb(b),e[b].pb(a);
            }
            dfs(1);
            ans=1LL*f1[1]*qpow(n,mod-2)%mod;
        } else {
            ans=qpow(y,n);y=qpow(y,mod-2);
            polynomial::init();
            for (i=fac=1;i<=n;i++) {
                fac=1LL*fac*i%mod;
                f[i]=1LL*qpow(i,i)*n%mod*n%mod*qpow(fac,mod-2)%mod*y%mod;
            }
            polynomial::exp(f,n+1,g);
            ans=y?1LL*ans*g[n]%mod*fac%mod*qpow(n,mod-1-4)%mod:qpow(n,(n-2)<<1);
        }
        print((1LL*ans*w%mod+mod)%mod);
    }
    putc('\n');
    return 0;
}
```

总结

本题是一道以数数为基础的题。
考察了 $Matrix - Tree$ 和树的 $Prufer$ 序列两种树计数工具。
结合了连通块图的 DP、树形 DP、容斥原理、行列式的性质意义及求值、组合意义、多项式运算（多项式乘法、多项式求逆、多项式求 ln、多项式 exp）等知识点。
是一道多方面考察选手数数姿势的好题。

感谢

- 感谢 CCF 提供比 (liang) 赛 (xin) 的平台。
- 感谢瀚文同学一眼想出了 Question2 的解法
- 感谢凯路老哥帮我背锅
- 感谢吕老板提供了 Question1 的优质解法

谢谢大家