

超现实树

清华大学 交叉信息研究院 李嘉图

清华大学 交叉信息研究院 杨天祺

题面简述



分数分布

- ▶ $= 100$: 22人
- ▶ ≥ 40 : 80人
- ▶ ≥ 20 : 150人
- ▶ < 12 : 121人

自由吐槽



我咋觉得.....这题是 coRE-complete 的.jpg



可以大致理解成等价于
停机问题的不可解问题

但没关系[呲牙]

- ▶ 输出 Almost Complete 可以得到4分的好成绩！
- ▶ 输出样例可以得到12分的好成绩！

从零到一

- ▶ 假设 H 是所有给定的树集 $\mathcal{T}$ 的深度的最大值，那么枚举所有深度不超过 H 的树，判定它是否能够被生成
- ▶ 复杂度： $O(2^{2^H})$
- ▶ 得分：20分

从一到二

-

性质三

- ▶ 由之前的性质（或者找规律），可以发现性质三的情况下，答案是YES当且仅当包含单个节点的树
- ▶ 得分：4分

我们得到一个算法了

哦，那感觉就是 coNP-complete 的吧？



图灵奖有了啊



带我一起



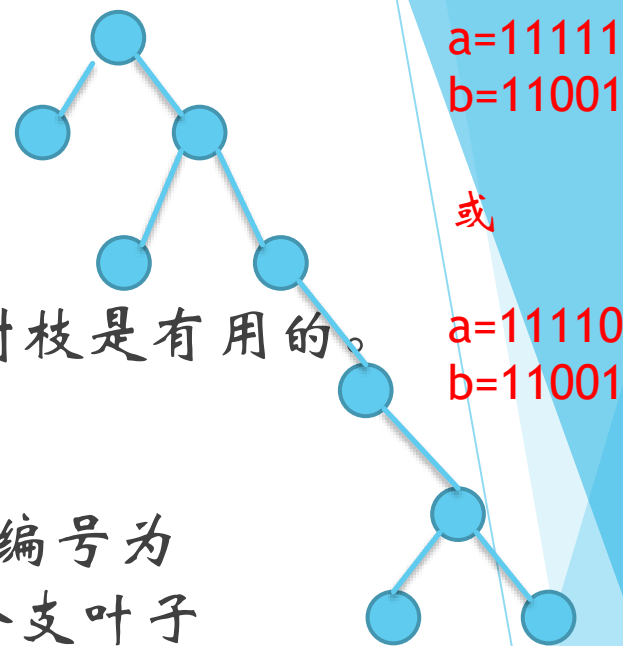
可以大致理解成 NP-complete

5 分 钟 后.....

哦，我好像会线性的了 😄



从二到无穷大



► 再思考一下发现，在给定的树集 $\mathcal{T}$ 中，也只有树枝是有用的。

► 对于树枝，我们可以按照其主链和分支叶子节点编号为 (a, b) ，其中 a 表示主链的方向， b 表示是否有分支叶子

► 可以将 a 和 b 分别建成两个 Trie，然后把每个树枝看成两个 Trie 上的一个点对

► 那么答案是 YES 当且仅当所有叶子节点的点对都能够被一个 $\mathcal{T}$ 中某个树枝对应的点对覆盖

从二到无穷大

- ▶ 可以将 a 和 b 分别建成两个 Trie，然后把每个树枝看成两个 Trie 上的一个点对
- ▶ 那么答案是YES当且仅当所有叶子节点的点对都能够被一个 $\mathcal{T}$ 中某个树枝对应的点对覆盖
- ▶ 可以DFS一棵树，用线段树维护另一棵树的DFS序，维护每个点是否被覆盖了
- ▶ 复杂度： $O(n \log n)$
- ▶ 得分：100分

但是我们要 有梦想

- 事实上是可以做到线性的

编译选项

对于 C++ 语言	-lm -O2 -std=c++11
-----------	--------------------

编译选项

C++11? ? ?

▶ random

✗

▶ regex

✗

▶ unordered_set

✓

但是我们要 有梦想

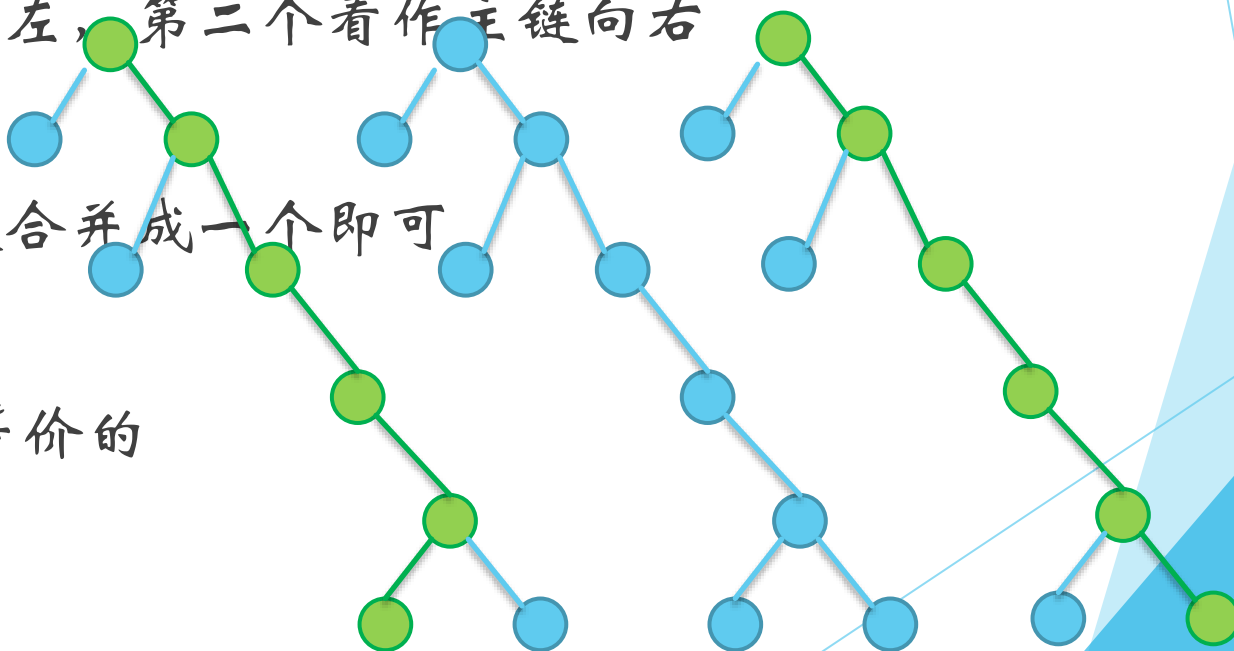
- ▶ 考虑一个合并点对的思路
- ▶ 假设 $(a.lc, b.lc)$, $(a.lc, b.rc)$, $(a.rc, b.lc)$, $(a.rc, b.rc)$ 四个点对都存在，我们可以将其合并成一个点对 (a, b) ，最终答案为YES当且仅当最终合并出 $(1, 1)$
- ▶ 按深度从大到小尝试合并，用哈希表维护点对是否存在
- ▶ 复杂度: $O(n)$
- ▶ 得分: 100分

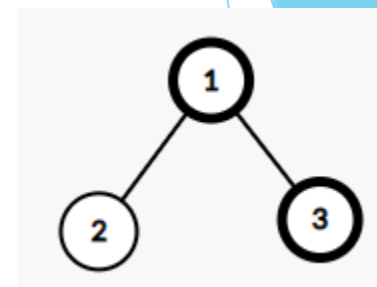
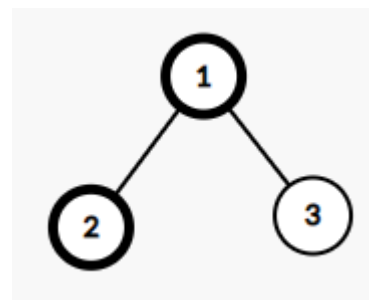
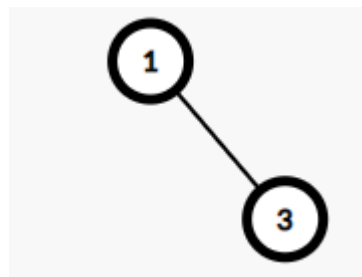
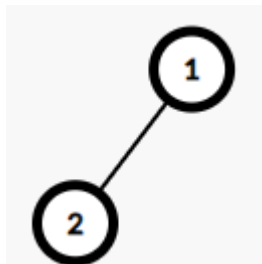
但其实并不需要哈希表.jpg

- ▶ 哈希表是一个w.h.p.的数据结构，在最坏情况可能会很差
- ▶ 其实用set就可以了。首先考虑为每一个深度分别维护set
- ▶ 注意到的关键性质是深度为 h 的树枝只有 $O(2^{2h})$ 个，因此因此在这样的一个set中查询的复杂度是 $O(h)$ 的，但是这样一个树枝有 $\Omega(h)$ 个节点，因此均摊一下复杂度就是线性的了
- ▶ 其实可以进一步证明总点数为 n 的树枝集合最多只有 $\frac{4n}{\log n} + \sqrt{n}$ 个，证明可以自己尝试一下。

另一种视角

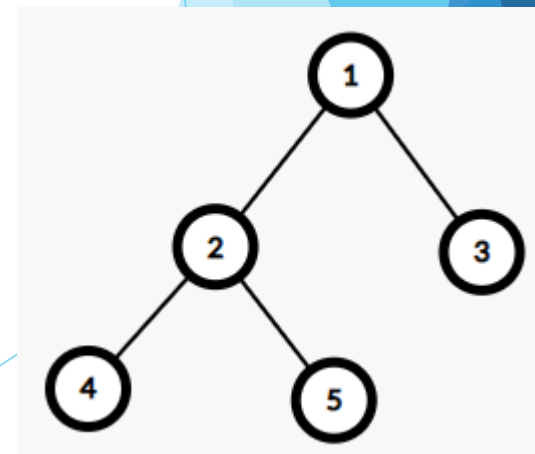
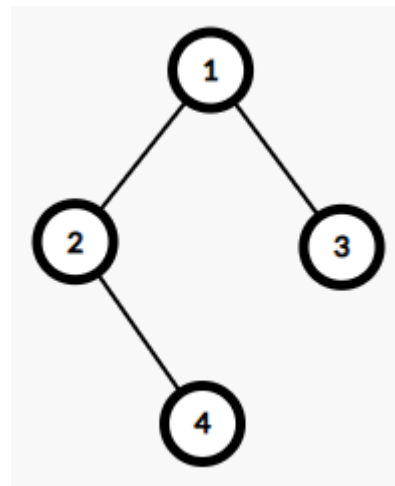
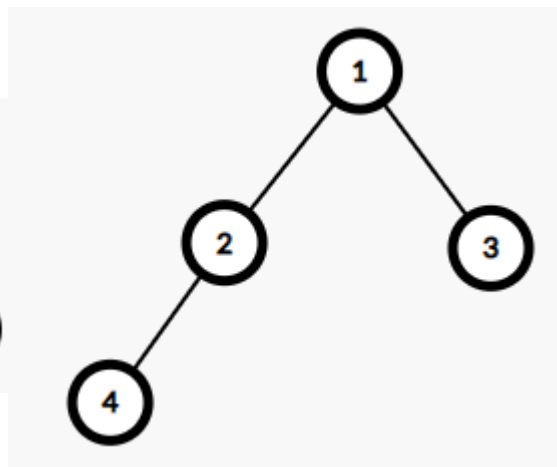
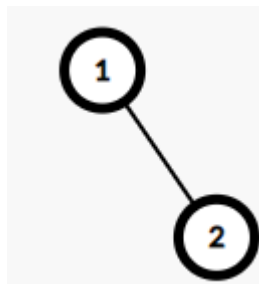
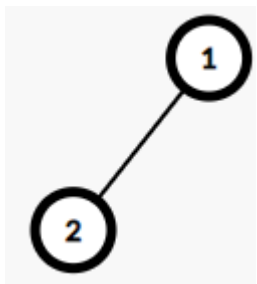
- ▶ 上述做法可以看成是一个树合并的思想
- ▶ 我们把所有深度最深的中间节点有两个子节点的树枝拆成两个，第一个看作主链向左，第二个看作主链向右
- ▶ 每次将四种情况的树枝合并成一个即可
- ▶ 和之前 Trie 的思路是等价的

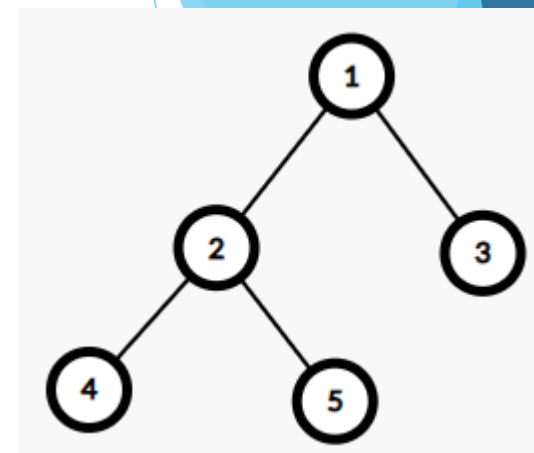
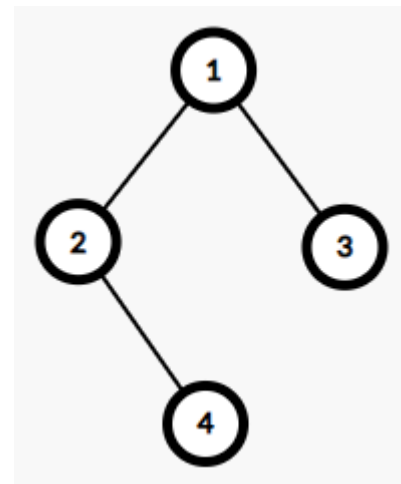
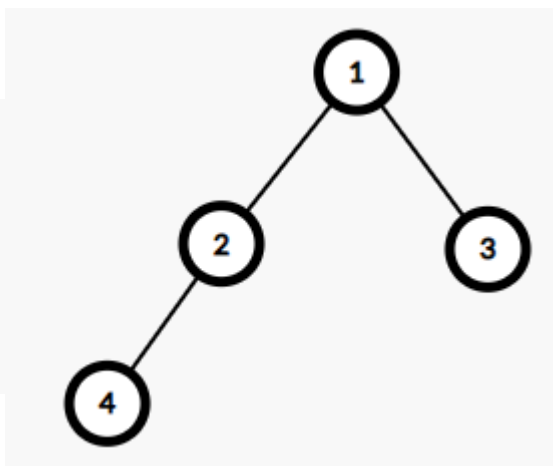
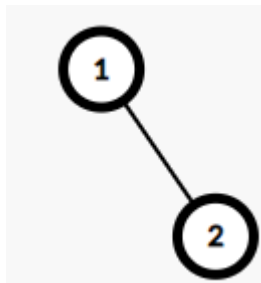
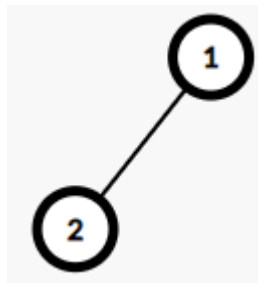




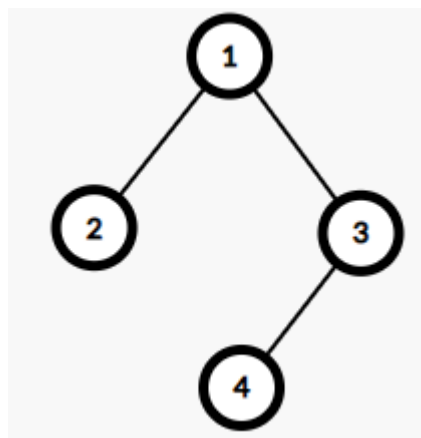
4缩1 or 3缩1

- ▶ 有不少选手想到了一个将**三棵树**缩成一个的做法，即不将**深度最深的中间节点有两个子节点的树枝**，然后把两种情况当成一种去做。
- ▶ 这样是错误的，反例：





不能替换成:

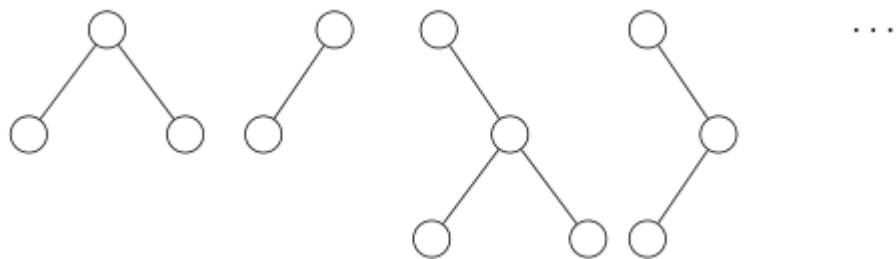


这个反例在大样例中有给出

这个错误的做法可以通过性质4的点

树的深度

- ▶ 答案为YES的总点数为 n 的集合中有用的树的最大深度是 $O(\sqrt{n})$ 的



To Conway

- ▶ 本题献给在新冠肺炎疫情中去世的数学家约翰·康威 (John H. Conway, 1937.12.26~2020.4.11)。他的研究兴趣涵盖组合游戏、群论等多个领域，在有限群分类、元胞自动机和组合游戏上做出了重要的贡献；他致力于数学科普，设计了曾风靡全球的“康威的生命游戏” (Conway's Game of Life)。
- ▶ 计算机科学大师高德纳 (Donald E. Knuth) 曾写过一篇对话体数学小说《超现实数》 (Surreal Number) 介绍康威为研究组合游戏而开发的一套纯数学理论。

Make Combinatorics Great Again!

欢迎提问