

琪露诺的符卡交换 题解

by pecuria

前言

- 一道非常小清晰的构造题
- 有一点思维难度但不多

题目大意

- 有 n 种卡片，每种卡片 n 张。 n 个人每个人分别有 n 张卡片。
- 对所有人持有的卡片两两进行交换，每张卡片最多交换一次。
- 要求交换结束后所有人都持有 n 种不同的卡片。

子任务 1

- 每个人只持有一种卡片。
- 将每个人的卡片拿 $n-1$ 张出来分别与其他人交换一次即可。

子任务 2

- 每个人持有至少 $n-1$ 张同一种类的卡片。
- 发现在子任务 1 中，可以将 $a(i,j)$ 看作一个 $n*n$ 的矩阵 A 中的元素，交换过程可以抽象为将 A 按主对角线翻折，即 $a(i,j)$ 和 $a(j,i)$ 交换。
- 考虑设一个矩阵 B ，其中 $b(i,1)$ 到 $b(i,n-1)$ 表示第 i 个人持有的那 $n-1$ 张同一种类的卡片， $b(i,n)$ 表示持有的另一张卡片，然后将 B 按主对角线翻折即可让所有人都持有 n 种卡片。
- 仅针对此 subtask 的其它思路也是可以通过的，例如优先用其它人多出来的卡片与第一个人交换，这样第一个人就有 n 种卡片并且剩下的人形成了 subtask1 中大小为 $n-1$ 的子问题。
- 其实用这种思维方式也可以想出正解，只是要稍微绕一点。

子任务 3

- 考虑这种交换方式成立的条件。
- 显然是 B 中每一列的卡片种类两两不同。
- 而对于每个人而言，交换同一个人的两张卡片显然是可以无限次交换的。
- 那么就将问题转化为交换 A 中同一行的两张卡片，可以交换无数次，最后使得每一列的卡片种类两两不同。

- 构造 n 个人和 n 种卡片为顶点的二分图，如果某个人有某种卡片，则在这个人与这种卡片之间连边，可能有重边。
- 由于每个点的度都为 n ，由霍尔定理可得，可以将这个二分图分拆为 n 个完美匹配的并。
- 那么令 $b(i,j)$ 表示第 j 个完美匹配中第 i 个人匹配到的卡片种类，将 B 按照主对角线对称，即可符合题意。
- 因此不可能出现无解的情况。

- 找完美匹配的部分根据实现方式的不同有 $O(n^{3.5})$ 和 $O(n^3)$ 两种时间复杂度。
- 因为考察重点不在于此所以前者也可以通过。
- ~~• 此外，因为出题人没有想出看上去比较合理的其它做法，所以数据强度不敢保证（但至少卡掉了我能想到的随机做法以及错误做法）。欢迎选手们乱搞过题或者爆踩标算。~~

致谢

- 感谢彭思进提供的另一份标程，以及对题面和数据的改进建议。
- 感谢北京大学和 cts-wc 提供的出题机会。