

5B – Desant 2

autor zadania: Mateusz Radecki

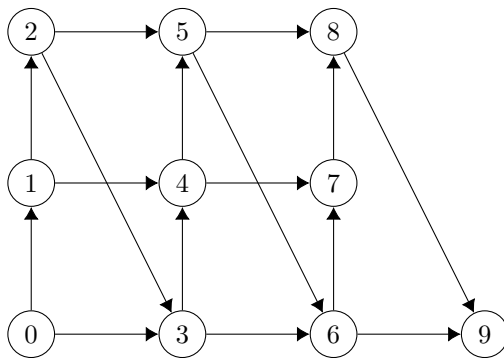
Treść

Dany jest ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \dots, a_n$ oraz liczba k . Naszym zadaniem jest odpowiadać na zapytania o podprzedziały zadanego ciągu. Dla każdego zapytania należy wyznaczyć maksymalną możliwą sumę liczb pokrytych rozłącznymi przedziałami długości k zawartymi w całości w podprzedziale z zapytania.

Rozwiązanie

Zinterpretujmy zadanie grafowo. Niech graf zawiera $n + 1$ wierzchołków, ponumerowanych liczbami całkowitymi od 0 do n . Dla każdego i z przedziału $[0, n - 1]$ dodajmy do niego krawędź skierowaną z wierzchołka i do wierzchołka $i + 1$ o wadze 0. Dla każdego i z przedziału $[0, n - k]$ dodajmy krawędź skierowaną z wierzchołka i do wierzchołka $i + k$ o wadze będącej sumą wartości a_j dla j z przedziału $[i + 1, i + k]$. Nietrudno zauważyć, że odpowiedzią na zapytanie o przedział $[\ell, r]$ jest długość najdłuższej ścieżki z wierzchołka $\ell - 1$ do wierzchołka r .

Wyobraźmy sobie nasz graf narysowany na płaszczyźnie, gdzie wierzchołek i narysujemy w punkcie o współrzędnych $(\lfloor \frac{i}{k} \rfloor, i \bmod k)$. Przykładowo, dla $n = 9$ oraz $k = 3$, nasz graf wygląda następująco:



Nasz graf ma bardzo regularny kształt i łatwo jest szukać w nim separatorów. Spróbujmy zatem, w pewien sposób używając na nim techniki dziel i zwyciężaj, policzyć odpowiedzi dla wszystkich zapytań.

Jeśli nasz graf jest bardziej szeroki niż wysoki (czyli liczba kolumn w kracie jest większa niż liczba wierszy) możemy skorzystać z faktu, że każde zapytanie albo ma jeden wierzchołek na lewo od środkowej kolumny, a drugi na prawo, albo w całości zawiera się po którejś ze stron. Jeśli zachodzi pierwszy przypadek, to na pewno optymalna ścieżka przechodzi przez środkową kolumnę, w której to znajduje się nie więcej niż $\sqrt{n}$ wierzchołków. Możemy zatem dla każdego z nich (nazwijmy go v) policzyć długości najdłuższych ścieżek zaczynających się w dowolnym wierzchołku i kończących w v , oraz długości najdłuższych ścieżek zaczynających się w v i kończących w dowolnym innym wierzchołku. Jeśli jakaś ścieżka nie istnieje, to jej długość traktujemy jako $-\infty$. Całość zajmie nam oczywiście czas $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$. Następnie, możemy założyć dla każdego zapytania, że optymalna ścieżka przebiega właśnie przez v . Wtedy oczywiście długość ścieżki z wierzchołka startowego s do wierzchołka końcowego t wynosiłaby $\text{dist}(s, v) + \text{dist}(v, t)$. Jako, że każda rozważana ścieżka musi przechodzić przez któryś z wierzchołków w środkowej kolumnie, to na pewno rozważymy też optymalną z nich. Następnie, możemy rekurencyjnie wywołać się na lewej oraz prawej części kraty i tam niezależnie policzyć wyniki.

Jeśli zaś nasz graf jest bardziej wysoki niż szeroki, to możemy zrobić coś bardzo podobnego, jednak będąc bardziej uważnym. Gdyby nie było krawędzi z ostatniego rzędu do pierwszego, to moglibyśmy po prostu zrobić to samo dla środkowego wiersza. Jeśli jednak w naszym wywołaniu rekurencyjnym nadal dostaliśmy wszystkie wiersze, to musimy najpierw założyć, dla każdego zapytania, że optymalna ścieżka dla niego przechodzi przez najniższy rząd. Możemy w ten sposób w złożoności $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ zrelaksować wyniki dla wszystkich zapytań i wywołać się na kracie bez pierwszego rzędu. Nie podzieliliśmy wierszy na dwie grupy, ale na szczęście we wszystkich głębszych wywołaniach rekurencyjnych, gdy nasz graf będzie bardziej wysoki niż szeroki, będziemy już mogli rozbić się rekurencyjnie wokół środkowego rzędu.

Wybierając za każdym razem lepszy wymiar do rekurencyjnego rozbicia się, zgodnie z twierdzeniem mistrza, uzyskamy sumaryczną złożoność $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$.