A

首先，记连接处点的凸包为凸多边形 S_0，半径为 r 的圆为 $O_2(r)$，球为 $O_3(r)$，则要求体积的图形为 $V = S_0 + O_2(R_2) + O_3(R_3)$，其中 $+$ 是 Minkowski 和。

记 $f(z_0)$ 为 V 和平面 $z = z_0$ 的交集的面积，则体积可以由积分 $\int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z$，由对称性等于 $2\int_0^R f(z)\mathrm{d}z$。

$f(z)$ 对应的图形可以认为是 $S_0 + O_2\left(R_2 + \sqrt{R_3^2 - z^2}\right)$ 的，考虑形如 $S_0 + O_2(r)$ 的面积如何计算。

考虑 $S_0 + O_2(r)$ 是什么形状。对于凸多边形 S_0 的边界，可以认为是 n 条线段和 n 个顶点，线段对应垂直往外平移 r，顶点对应连接相邻线段两端点的圆弧。这样的形状可以拆成三个部分计算面积：原凸多边形 S_0、线段平移形成的 n 个长方形和 n 个顶点对应的圆弧。不难发现 n 个圆弧可以拼成完整的圆，记 S_0 的面积为 A，周长为 C，则 $S_0 + O_2(r)$ 面积为:

$$A + C \cdot r + \pi r^2$$

最终答案即:

$$\begin{aligned}
&2\int_0^{R_3} f(z)\mathrm{d}z \\
=&2\int_0^{R_3} \left(A + C\left(R_2 + \sqrt{R_3^2 - z^2}\right) + \pi\left(R_2 + \sqrt{R_3^2 - z^2}\right)^2\right)\mathrm{d}z \\
=&2\int_0^{R_3} \left(A + CR_2 + \pi(R_2^2 + R_3^2) + (C + 2\pi R_2)\sqrt{R_3^2 - z^2} - \pi z^2\right)\mathrm{d}z \\
=&2AR_3 + 2CR_2R_3 + 2\pi R_3(R_2^2 + R_3^2) + \frac{1}{2}\pi R_3^2(C + 2\pi R_2) - \frac{2}{3}\pi R_3^3
\end{aligned}$$

时间复杂度 $O(n\log n)$。

B.

按照高度分层，那么在每一层都是一个匹配模型，用上下界费用流模型建图即可。

注意代价存在负权，可以用预先流满负权边再建立反向边的方式处理。

C.

考虑二分贪心判定 x:

将 F_1, F_2, F_4 的值都先给对应的人, F_7 可以最后决定随意分配, 所以只需要关心 F_3, F_5, F_6.

优先将 F_3 分配给第一个人, F_6 分配给第二个人, F_5 分配给第三个人.

这样第一个人就可以选择至多 F_3 分配给第二个人, 第二个人可以选择至多 F_6 分配给第三个人, 第三个人可以选择至多 F_5 分配给第一个人.

假设 b_i 是 i 这个人当前有的题目数, 考虑在符合条件的情况下能匀出来 $\max\{\min\{b_i - x, x - b_{(i+1)\%3}, F_{2^i+2^{(i+1)\%3}}\}, 0\}$ 给 b_{i+1}.

$i \to (i+2)\%3$ 同理, 可以通过类似的调整让 $\sum \min(b_i, x)$ 尽可能大, 最后判定成功条件就是 $\sum \min(b_i, x) + F_7 \geq x \times 3$.

本题也可以使用 Hall 定理/网络流判定 通过.

D.

考虑一个长度为 n 的序列 a 第 i 个位置对应的系数 F 是: $1, 1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$, 那么这个序列的价值应该是将 a_i 排序后求出 $\sum_{i=1}^{n} a_i \times F_i$.

先将给定的序列排序, 对于所有子序列, 只需要考虑第 i 个数作为子序列的第 j 个数的贡献系数, 应当是 $\binom{i-1}{j-1} \times F_j \times 2^{n-i}$.

所以第 i 个数的总贡献系数是 $\sum_{j=1}^{i} \binom{i-1}{j-1} \times F_j \times 2^{n-i} = \frac{(3^{i-1}+1)}{2} \times 2^{n-i}$.

直接计算即可.

E.

相邻两个配对，如果奇数个把最前面那个孤立，则每一对在 $[1, 2^m)$ 内等概率随机出现。

如果奇数个最前面那个随便调整，否则当成 $[0, 2^m)$ 容斥 0 的个数，容斥式子:

$$
\begin{aligned}
&(-1)^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} 2^{(i-1)m} \\
&= (-1)^n + 2^{-m} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{im} (-1)^{n-i} - (-1)^n \right) \\
&= (-1)^n + 2^{-m} \left((2^m - 1)^n - (-1)^n \right)
\end{aligned}
$$

时间复杂度 $O(T \log n)$。

F.

先参考G题，剩下的部分为每个点是否平方可以产生贡献分别有一个代价，如果不可达则记作正无穷大，每个数都有四种选择，通过枚举有多少个数 $x_i < A, y_i < B, x_i^2 \geq A, y_i^2 \geq B$，剩下的三类点的个数即唯一确定。剩下问题变成了一个 8 个点，$O(n)$ 条边的费用流问题，通过堆模拟费用流的整个过程计算即可。

G.

首先枚举最终有多少个数恰好为 A 和 B，只有 4 个位置对此会产生影响，我们对这 4 个位置单独枚举。
如果对于一组 (x_i, y_i)，$x_i \geq p$，那么对该位置的 x_i 进行平方操作显然无效，我们只会对那些 $x_i < p, x_i^2 \geq p$ 的位置进行操作，y 坐标同理。

根据 x, y 平方是否有意义，可以分为四类数，这四类数在以每个点以 (x_i, y_i) 为坐标的平面直角坐标系上均为一个矩形范围，可以利用二维数点计算出每个矩形块内的个数，剩下的部分贪心即可。

H.

首先一次操作的作用是选择一条链并随意打乱链上的点权。

首先单独计数计数序列 $a_i = i$。

对于一个最终得到的点权序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，其可以构造的条件为满足 $a_i \neq i$ 的点位于一条链上。

从链的角度出发计数，为了保证不重复计数，我们希望对于序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，只在最短的可行链处计数。

对于一条长度为 k 的链，有 $k!$ 种不同的打乱链的方式。假设其左右两端点分别为 x, y，则如果 $a_x = x$ 或者 $a_y = y$ 时，可以操作更短的链得到序列，于是我们减去这两种情况，即 $2(k-1)!$。然而此时 $a_x = x$ 且 $a_y = y$ 的序列会被重复减，再加回去 $(k-2)!$ 即可。

注意到上述计数只与链的长度有关，于是只需要统计出每种长度的链分别有多少条即可，这个用从每个点出发遍历就可以 $O(n^2)$。

I.

记 $F(c) = f(1, n, c)$，整个答案是一个关于 c 的 $n-1$ 次多项式，通过拉格朗日插值计算答案。

J.

有解的必要条件是, 给定的图可以分成若干个集合 $S_1 \ldots S_k$, 并且不同集合的点之间都存在连边, 不在任何集合内的点被称为特殊点.

可能的构造如下:

如果 $k = 2$, 可以在 S_1, S_2 中间用特殊点造一条链;

如果 $k > 2$, 要么直径长度为 2, 构造是容易的; 要么直径长度为 4, 可以尝试构造一个特殊点点下面挂 k 个特殊点, 每个点下面再挂上每个集合内的点, 多余的特殊点都可以挂在根上.

构造完不一定合法, 因为当前构造可能会有多余的直径点对.

可以大力分类讨论, 也可以通过哈希或者复杂度正确的暴力判定合法避免分类讨论.

K.

一棵树的重心只有一个或两个两种情况，所以答案即为连通块数减去双重心的连通块数。

双重心的树等价于存在唯一的一条边，使得断开这条边后两个连通块大小相等。在原树上以这条边为界，这条边子树内的点权为 1，子树外的点权为 -1，则就是在数点权和为 0 的连通块数。

那么树形 DP。设 $f_{i,j}$ 表示 i 子树内包含 i 的 j 个点的连通块数； $g_{i,j}$ 表示 i 子树内，包含 i 且 i 子树以外的点权均为 -1 时点权和为 j 的连通块数。$g_{i,j}$ 可以通过 $f_{i,j}$ 转移，且整个 DP 类似树上背包，时间复杂度 $O(\sum n^2)$。

L.

一种简单的写法是高低位分块.

记录一个块数组, 表示每种不同的块的内部结构, 在任何时刻, 这个块数组的有效大小不会超过 $\frac{n}{B}$. (如果块数组中某个块没有被序列的任何一块依赖, 就可以直接删掉)

实际上只需要对这个序列的每个块 i 记录一个信息 (id_i, xor_i), 描述这个块是块数组中的第几个块以及内部的形态.

针对整块的修改, 只需要将 k 拆成 $xB + y$, 将块 i 的信息标注成 $(id_{i \oplus x}, xor_{i \oplus x} \oplus y)$ 即可.

针对散块, 修改完只需要加进去一个新的整块即可, 并将散块所在的块 i 的信息标注成 $(id_i, 0)$.

查询的时候是容易的, 只需要查询块和, 以及每个位置的数值.

空间复杂度 $O(n)$, 时间复杂度 $O(q(\frac{n}{B} + B))$, 取 $B = 2^9$ 可以通过.

空间开 64 MB 是防止访问大数组导致的 TLE.