

# ビルの飾り付け4 (Building 4) 解説

細川 寛晃

# 問題概要

- 長さ  $2N$  の整数列  $A, B$  がある
- 各  $i$  に対し  $A_i, B_i$  のどちらかを選んで、以下の条件を満たすようにできるか？
  - $A$  から  $N$  個の項を選んでいる
  - 選んだ項で作った、長さ  $2N$  の数列が(広義)単調増加
- できる場合はそのような選び方を構成せよ

# 動的計画法(DP)

- 「○○な条件を満たすような選び方の数を求めよ」のような問題がDPで解けることが往々にしてある
- 今回は存在するかどうか判定するだけだが、DPによるアプローチを考えてみる

# 必要な状態は？

- 前から順に、A と B のどちらの項を選ぶかを決めていく
- 「A から N 個の項を選ぶ」という条件がある
  - 今までに選んだ A の個数を状態として持つておく必要がありそう
- 「単調増加」の条件
  - 今選ぼうとしている項が、一つ前の項よりも大きければOK
  - 「一つ前の項を A と B のどちらから選んだか」によって、今選べる項が変わってくる
- 「一つ前の項を A と B のどちらから選んだか」も状態として必要

# 小課題1 (11点)

- bool値のDPをします
- $dp[i][j][A \text{ (or } B)] :=$  ビル  $i$  まで見て  $A$  から  $j$  個選んでおり、最後に選んだのが  $A$  (or  $B$ ) である状態にできるかどうか

- 遷移の例 ( $A$  から  $A$  のとき):

$$A_i \leq A_{i+1} \text{ であれば } dp[i][j][A] \rightarrow dp[i+1][j+1][A]$$

のように行う

- $A$  から  $B$ 、 $B$  から  $A$ 、 $B$  から  $B$  の遷移も同様
- $dp[2N][N][A]$  または  $dp[2N][N][B]$  が true ならば条件を満たす選び方が存在
- 計算量は  $O(N^2)$

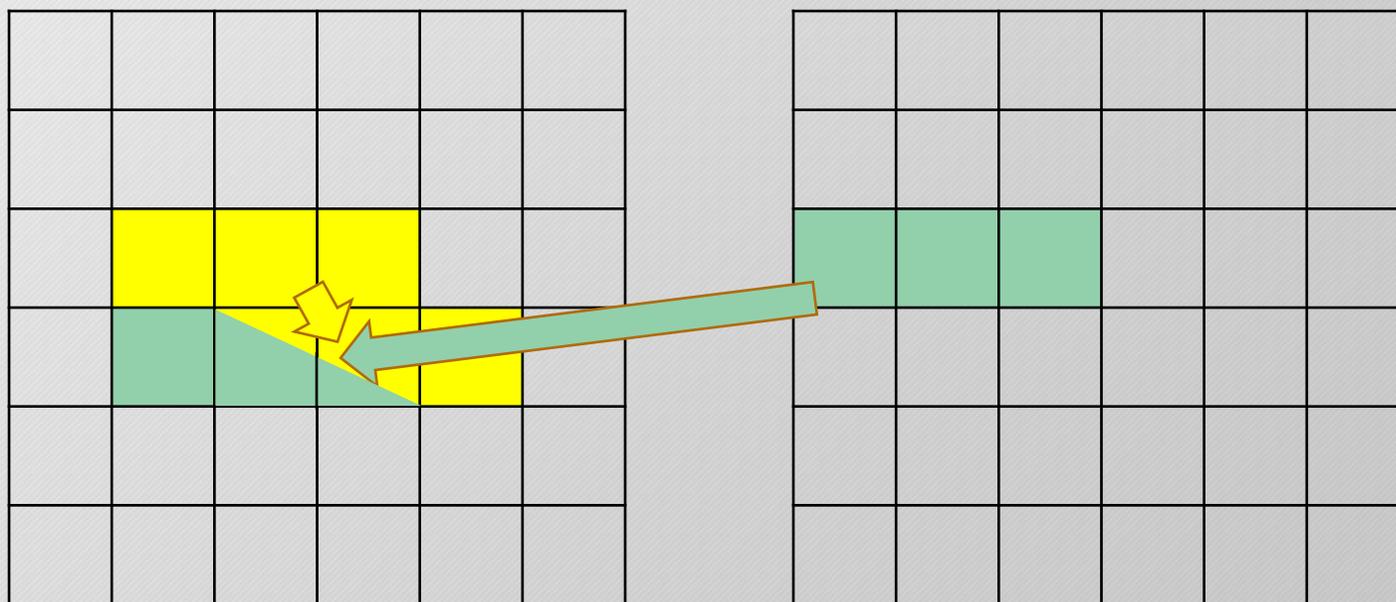
# 解の復元パート

- 後ろ( $dp[2N][N][A \text{ or } B]$ )から見ていく
- 値が true である状態からは1つ戻っても true である状態が存在
  - 例えば  $dp[i][j][A]$  が true なら  $dp[i-1][j-1][A]$  と  $dp[i-1][j-1][B]$  の少なくともいずれかは true
  - その戻り方ができるかは要確認
    - 例えば A から B に戻るときは  $B_{i-1} \leq A_i$  でなければならない
- true である状態をたどっていけば、それは条件を満たす選び方になっている

# 遷移を観察

- 実は  $dp[i][j][A \text{ or } B]$  が true となる  $j$  は区間になっている！
  - 証明は後日公開します(帰納的/非帰納的な証明が存在します)
- この区間を計算するDPをすれば解けそう

# 概念图



# 小課題2 (89点)

$dp'[i][A \text{ or } B] := dp[i][j][A \text{ or } B]$  が true となるような  $j$  の区間

- としてDPを行う
- 遷移の例:
- $A_i \leq A_{i+1}$  であれば  $dp'[i+1][A]$  の区間に  $dp'[i][A]$  の区間をマージ
  - A を選ぶときは区間が1つずれるので注意
- 計算量は  $O(N)$

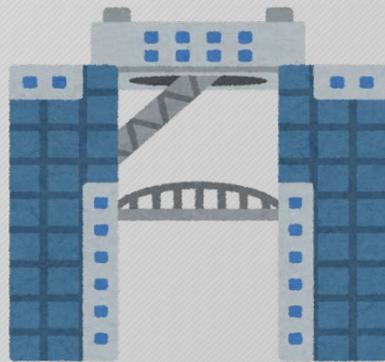
# 解の復元パート

- 先ほどと同様、後ろ( $dp'[2N][A \text{ or } B]$ )から見ていく
- Aから選んだ個数( $j$ とする)を管理しながら、 $dp'[i][A \text{ or } B]$ の区間内に $j$ が含まれているような状態をたどっていけばOK

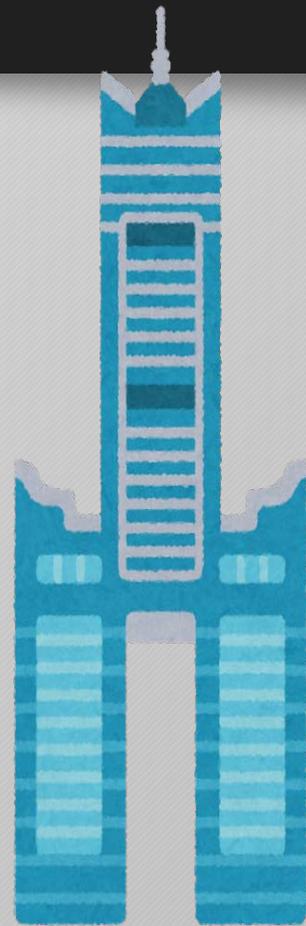
# 得点分布



0



11



100