

Slight Hope 解题报告

题目大意

有一棵 n 个点的有根树（节点标号为 $1 \sim n$ ），以 1 号点为根。其中 i 号点的点权为 a_i 。

假设 i 号点的父节点为 f_i （方便起见认为 $f_1 = 0$ ），则对于任意整数 $i \in [2, n]$ ，满足 $f_{i-1} \leq f_i < i$ 。

共 q 次询问，第 i 次询问给出一个区间 $[l_i, r_i]$ ，求 $\sum_{x=l_i}^{r_i} \sum_{y=l_i}^{r_i} [l_i \leq \text{LCA}(x, y) \leq r_i] \cdot a_x \cdot a_y$ （向 998244353 取模）。

本题强制在线。

数据范围

Subtask1(20%): $n, q \leq 5 \times 10^3$

Subtask2(20%): $n, q \leq 5 \times 10^4$

Subtask3(20%): 树的形态随机

Subtask4(40%): 无特殊限制

对于 100% 的数据， $1 \leq n, q \leq 2.5 \times 10^5$ ， $0 \leq a_i < 998244353$ ， $1 \leq l_i \leq r_i \leq n$ 。保证对于任意整数 $i \in [2, n]$ ，满足 $f_{i-1} \leq f_i < i$ 。

解题过程

性质一

性质： x 的祖先标号必然小于 x 。

可以归纳证明。

1 号点没有祖先，结论成立。

假设对于标号小于 m 的点都成立。由于 $f_m < m$ ， f_m 的所有祖先标号都小于 f_m 进而也小于 m ，因此 m 的祖先标号都小于 m 。

综上，归纳成立，原命题成立。

性质二

性质： dep_i 随着 i 的增大不降。

可以归纳证明。

$dep_2 = dep_1 + 1 > dep_1$ ，结论成立。

假设对于标号小于 m 的点都成立。由于 $dep_m = dep_{f_m} + 1$ ， $dep_{m-1} = dep_{f_{m-1}} + 1$ ，且 $f_{m-1} \leq f_m < m$ ，故 $dep_{f_{m-1}} \leq dep_{f_m}$ ，进而 $dep_{m-1} \leq dep_m$ ，结论成立。

综上，归纳成立，原命题成立。

性质三

设 g_i 为满足 $f_j < i$ 的最大 j 。

性质： i 和 g_i 的深度至多相差 1。

根据性质二， $dep_{g_i} = dep_{f_{g_i}} + 1 \leq dep_i + 1$ 。

性质四

性质：标号在 $[l, r]$ 范围内的点构成以 $[l, \min\{r, g_l\}]$ 中的点为根的若干无交连通子树。（注意，这里的子树不是指原树中一棵完整的子树，而是可以选取连通的一部分）

首先，由于 $[l, \min\{r, g_l\}]$ 中的点的祖先都小于 l ，不在 $[l, r]$ 范围内，所以肯定存在以它们为根的这些无交连通子树。

然后考虑归纳，证明 $[l, r]$ 中的所有点都在这些子树中。

$[l, \min\{r, g_l\}]$ 中的点都在各自的连通子树中作为根节点，结论成立。

假设对于标号在 $[l, m)$ 范围内的点都成立 ($m \in (\min\{r, g_l\}, r]$)。由于 $l \leq f_m < m$ ，所以 f_m 在某棵连通子树中。而 m 与 f_m 连通，故 m 也在这棵连通子树中。

综上，归纳成立，原命题成立。

题意转化

对于一个询问 $[l, r]$ ，如果我们只保留 $[l, r]$ 范围内的点，根据性质四，它将构成以 $[l, \min\{r, g_l\}]$ 中的点为根的若干无交连通子树。

显然，当且仅当选择的点对 (x, y) 位于同一棵子树中， $LCA(x, y)$ 会在 $[l, r]$ 范围内。

而要在同一棵子树 T 中选择两个点，它们的乘积和为：

$$\sum_{x \in T} \sum_{y \in T} a_x a_y = \left(\sum_{x \in T} a_x \right) \left(\sum_{y \in T} a_y \right) = \left(\sum_{x \in T} a_x \right)^2$$

即 T 中所有点权和的平方。

综上，我们要求出的就是仅保留 $[l, r]$ 中的点时，这些子树点权和的平方和。

算法一

直接暴力。

枚举 $[l, \min\{r, g_l\}]$ 中的所有点，去它们子树里枚举所有 $[l, r]$ 范围内的点，统计出每个子树的点权和。

时间复杂度 $O(nq)$ ，期望得分 20 分。

算法二

假设可以离线。

据性质一， $[1, l)$ 中的点不可能出现在 $[l, r]$ 中的点的子树里，因此我们实际上可以不用只保留 $[l, r]$ 中的点，而是保留 $[1, r]$ 中的所有点。

于是把询问按照右端点排序，然后就能把节点一个个加入来扩展右端点了。

加入的过程需要更新所有祖先的子树点权和的平方，询问时就是对 $[l, \min\{r, g_i\}]$ 区间求和。

时间复杂度 $O(n^2)$ ，期望得分 0 分。（因为实际问题是强制在线的）

算法三

发现在算法二中每次加入点都要更新所有祖先，复杂度比较浪费。

考虑把这个过程分块一下，即每加入 S 个点就重构一次（遍历整棵树统计所有点的子树点权和，并对其平方做前缀和方便区间查询），不满 S 个点根据具体询问，直接求出这个点在谁的子树中更新对应子树点权和并更新答案即可。

至于如何判断一个点 x 在谁的子树中，根据性质三， $[l, \min\{r, g_i\}]$ 最多只有两种不同的深度，我们求出 x 深度为 $dep_t + 1$ 的祖先 t （使用倍增/树剖算法），如果 $t \leq g_i$ 说明 x 在 t 的子树中，否则说明 x 在 f_t 的子树中。

时间复杂度 $O(\frac{n}{S}n + qS \log n)$ ，认为 n, q 同阶并平衡复杂度得到 $O(n\sqrt{n \log n})$ ，期望得分 0 分。（同样因为强制在线）

算法四

发现在算法三中我们实际上没有必要离线，可以事先预处理出这些信息存下来在线做。

即对于所有 $i = 1 \sim \lceil \frac{n}{S} \rceil$ ，记录下仅保留标号在 $1 \sim (i-1) \times S$ 范围内的点时，所有点的子树点权和 $w_{i,x}$ ，及其平方的前缀和 $s_{i,x}$ 。

注意， $w_{i,x}$ 和 $s_{i,x}$ 如果全开满可能会超内存。但考虑到对于第 i 个块只有 $x \leq i \times S$ 时 $w_{i,x}$ 和 $s_{i,x}$ 才会有值，按这种想法开数组内存可以减半。

假设询问的是 $[l, r]$ ，按照先前的方式，我们在加入 $1 \sim (\lceil \frac{r}{S} \rceil - 1) \times S$ 中的所有点的基础上，枚举 $(\lceil \frac{r}{S} \rceil - 1) \times S + 1 \sim r$ 中的点，求出它在谁的子树中更新对应子树点权和并更新答案。

时间复杂度 $O(n\sqrt{n \log n})$ ，期望得分 60 分。

算法五

考虑使用 $O(n \log n)$ 预处理 + $O(1)$ 查询的 **长链剖分** 求 k 级祖先算法消去时间复杂度中的 $\log$ 。

定义一个点的长度为从它到其子树内深度最大的叶节点一共有多少个节点。并仿照重儿子，定义长儿子为长度最大的子节点，然后仅保留每个点与其长儿子的连边就把原树剖分成了若干条长链。

假设我们要求一个点 x 的 k 级祖先，设 hb_k 为 k 二进制下的最高位（可以事先预处理）。

预处理 $fa_{x,i}$ 表示 x 的 2^i 级祖先，并设 $p = fa_{x, hb_k}$ 。

找到 p 所在的长链链首 t ，则 t 这条长链长度一定大于 2^{hb_k} 。因为 p 到 x 路径上的点数就是 $2^{hb_k} + 1$ ，长链上的点数不可能比它小。

进而，因为 $2^{hb_k} > k - 2^{hb_k}$ ，我们得出结论： **t 和 x 的 k 级祖先的距离一定不超过 t 这条长链的长度。**

- 如果 x 的 k 级祖先在 t 的子树内，因为它在 t 这条长链上，到 t 的距离一定不超过长链的长度。
- 如果 x 的 k 级祖先在 t 的子树外，那么它到 t 的距离是 $k - 2^{hb_k} - (dep_p - dep_t) < 2^{hb_k}$ ，不超过长链的长度。

所以只需要对于每条长链的链首（设长度为 len ），分别存下从它向下 len 个点（即长链中的所有点）和从它向上 len 个点便可 $O(1)$ 查询。这一部分的空间复杂度为长链长度总和，即 $O(n)$ 。

时间复杂度 $O(n\sqrt{n})$ ，空间复杂度 $O(n\sqrt{n})$ ，期望得分 100 分。

（为了卡掉常数优秀的树剖求 k 级祖先不得不把时间限制调小。）

参考资料

刘汝佳，《算法竞赛入门经典》，清华大学出版社。

罗剑桥，《浅谈分块思想在一类数据处理问题中的应用》，2013年国家集训队论文。

邹逍遥，《浅谈分块在一类在线问题中的应用》，2015年国家集训队论文。

洛谷P5903 【模板】树上 k 级祖先