《整数》解题报告

孙嘉伟

2021 年 10 月 2 日

简述题意

有一个 $\{0,1,\ldots,n-1\}$ 的排列 p 和一个大整数 x，初始为 0。

你可以通过第 i $(0 \le i < n)$ 种操作来把 x 加上 2^{p_i}。

操作完成后，你会得知 x 的 *popcount*，即其二进制表示中 1 的个数。

你需要通过不超过 8×10^5 次交互确定排列 p。

排列 p 是事先确定的，不会根据选手的交互过程动态构造。

数据规模与约定

对于全部数据，$1 \le n \le 5000$。

子任务 #1（5 分）：$n \le 10$。

子任务 #2（10 分）：$n \le 70$。

子任务 #3（15 分）：$n \le 900$。

子任务 #4（10 分）：$p_0 = 0$。

子任务 #5（60 分）：无特殊限制。

当询问次数超过 8×10^5，但不超过 2×10^8 时，选手会得到一些部分分（设进行了 x 次询问，得分占满分的比例为 s）：

$$s = \begin{cases} 1 & x < 8 \times 10^5 \\ \frac{8\times 10^5}{x} & 8 \times 10^5 \le x \le 2 \times 10^6 \\ \max(\frac{180-20\lg 5x}{100}, 0) & x > 2 \times 10^6 \end{cases}$$

实现

部分分

$n = 1$ 的情况是平凡的，我们不妨设 $n > 1$。

不难发现，我们可以通过 n 次操作使得 $x = 2^n - 1$。

接下来我们可以任意选择一个数 i 并操作 i，即可获知 p_i 的值。

注意到一个问题：我们难以撤销询问操作。一种暴力的实现是，将每个位置的操作次数补全到 2^n，这样可以类比刚才的情况来处理，询问次数为 $O(n2^n)$。

这样的复杂度显然是不能接受的。

考虑 $p_0 = 0$ 的部分分：

我们可以发现，如果我们知道 x 在第 n 位及以上的位置的值，且 x 的 $0 \sim n-1$ 位均为 1，我们便可以通过一次操作 i 求出 p_i。

我们通过 n 次操作使得 $x = 2^n - 1$。

之后我们操作 1 并求出 p_1。之后将其他所有位置均操作一遍，这样 $x = 2^{n+1} - 2$。

由于我们已知 $p_0 = 0$，我们可以操作 0 来使 $x = 2^{n+1} - 1$，这样 x 的最低 n 位均为 1，且更高位均已知，我们可以同理求出其他的 p_i。

接下来，我们声明一个引理。

引理：在经过 n 次预处理操作后，我们总能通过 $O(n)$ 次操作来还原一个排列中所有前缀最小值的位置。

证明：

我们先将通过 n 次操作 x 的最后 n 位变为 1。

接下来，我们依次询问所有数，可以发现，每次 $popcount(x)$ 减小的位置是 p 的前缀最小值，且其精确值可以通过两次操作后 $popcount(x)$ 的差得出，于是命题得证。

我们发现，我们可以在第一轮询问中得到全部前缀最小值的位置，而前缀最小值必然会包含 0。我们于是就找到了使得 $p_i = 0$ 的 i，从而可以套用 $p_0 = 0$ 的做法。

这种算法和 $p_0 = 0$ 的做法最坏情况下均需要 $O(n^2)$ 的询问次数。

上述算法根据实现常数可以得到 $30 \sim 50$ 不等的分数。

标解

我们发现，随机重标号 p_i 并不会影响答案的正确性。

这样问题等价于数据随机的情况。

引理：每次删除一个排列的前缀最小值，排列的 LIS 长度减少且恰好减少 1。

证明：记原来的 LIS 长度为 x，下面证明操作后排列的 LIS 长度为 $x-1$：取出原排列的任意一个 LIS，可以发现 LIS 的第一项在前缀最小值中，而后面所有项均不在，故有且仅有第一项会被删除，即新排列的 LIS 至少是 $x-1$。

而如果删除前缀最小值后存在一个长度为 x 的上升子序列 q，由于原序列任意一个 LIS 的第一个元素必然被删除，因此 q 中不存在原序列的前缀最小值，我们取原序列中 q_1 之前的第一个前缀最小值，由于前缀最小值的

性质，可以发现其比 q_1 小（否则 q_1 在前缀最小值上），那么原序列的 LIS 至少为 $x+1$，矛盾！

至此，命题得证。

引理：随机排列的 LIS（最长上升子序列）长度期望为 $O(\sqrt{n})$。[1]

因此，随机化后期望的操作次数为 $n \times E(LIS)$，即 $O(n\sqrt{n})$。

标程的实现操作次数在 5×10^5 以下，足够通过此题。

参考资料

1. https://www.zhihu.com/question/266958886