《理论出线》解题报告

谭淇心

1 题目大意

有 n 个选手将参加 m 场比赛，第 i 个人有分数 w_i，将参加编号在区间 $[l_i, r_i]$ 内的比赛。每场比赛如果有至少一人参加，则会角逐出一位胜者令其分数 $+1$。

给定分数 v 以及询问类型 $tp \in \{0, 1\}$。记所有比赛结束后分数 $\leq v$ 的选手集合为 S。询问在所有比赛胜者可以任意指定的情况下，$|S|$ 的最大值。如果 $tp = 1$，还需要额外回答，在 $|S|$ 最大的基础上，能得到的不同 S 的数量对 $10^9 + 7$ 取模后的结果。

2 数据范围

对于所有测试数据，有 $1 \leq n, m \leq 2{\times}10^5, 0 \leq w_i, v \leq 1{\times}10^9, 1 \leq l_i \leq r_i \leq m, 0 \leq tp \leq 1$。且 $\forall 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$，若 $l_i < l_j$ 则 $r_i \leq r_j$。

subtask 1(5%): $n, m \leq 8$。

subtask 2(5%): $n, m \leq 15$。

subtask 3(20%): $n, m \leq 20$。

subtask 4(10%): $n, m \leq 2000, tp = 0$。

subtask 5(20%): $tp = 0$。

subtask 6(20%): $n, m \leq 2000$。

subtask 7(20%): 无特殊限制。

3 解题思路

3.1 算法 1

枚举所有比赛的胜者，算出最终所有选手的得分情况，直接得到集合 S。

总复杂度 $O(n^m)$，可以通过子任务 1。

3.2 算法 2

考虑枚举集合 S，判定是否存在一组合法的方案使得 S 中的选手得分都 $\leq v$。由于我们只需要求解 $|S|$ 最大值的情况，因此当 S 对答案产生贡献时，不在 S 中的选手得分一定 $> v$，可以不用考虑这些选手。

于是对于任意一场比赛，如果有不在 S 集合的选手参赛，直接指定其中任意一个胜利即可。对于其他的比赛，是一个二分图匹配的模型，S 集合中的每个选手 i 对应左部点中的 $v - w_i$ 个点（$w_i > v$ 时一定无解），每场比赛对应一个右部点，向参与比赛的选手的所有点连边。则 S 合法当且仅当二分图对右部点有完美匹配。

当 $v_i - w > m$ 时，多出的点没有意义，可以只保留 m 个点。然后就可以直接使用匈牙利算法求二分图匹配，即可通过子任务 2。

3.3 算法 3

使用 Hall 定理判定是否存在完美匹配，记 T 为只有 S 内选手参与的比赛的集合，则 S 有解当且仅当对 $\forall R \subset T$ 都有 $\sum_{i=1}^{n}(\cup_{j=l_i}^{r_i}[j \in R])(v - w_i) \geq |R|$。也可以转化为对 $\forall W \subset S$，只有 W 中选手参与的比赛数 $\leq |W|$。

于是可以设 f_S 表示 S 只有 S 中选手参与的比赛数是否 $\leq |S|$，g_S 表示是否 S 的所有子集都满足上述条件。则有转移 $g_S = f_S \cap (\cap_{x \in S} g_{S/x})$。总复杂度 $\mathcal{O}(2^n n)$，可以通过子任务 3。

3.4 算法 4

考虑贪心判断是否有解。

删去有不在 S 集合的选手参加的比赛，则剩余的比赛由多个区间组成。

那么不会有选手参与到两个区间的比赛中，否则它会包含这两个区间之间被删掉选手对应的区间。因此每个区间可以独立考虑。

每个区间内可以按如下的方式贪心判定是否有解：

从左到右考虑每一场比赛，选择参与这场比赛且分数 $< v$ 的选手中，参赛区间右端点最靠左的一位作为胜者。如果找不到这样的选手则无解。

正确性证明：考虑若将比赛 x 的胜者由 $[l_1, r_1]$ 换为 $[l_2, r_2]$，其中 $l_1, l_2 \leq x, r_1 \leq r_2$。则未匹配点组成的二分图中，减少了一个 $[l_2, r_2]$ 对应的左部点，增加了一个 $[l_1, r_1]$ 对应的左部点。由于右部点只有 $[x+1, n]$，与前者相连的右部点集合包含后者，故若原图中没有完美匹配，更换后也不会有完美匹配。

据此可以用堆维护参与当前比赛且分数 $< v$ 的所有选手，即可 $O((n+m)\log n)$ 进行单次判定，总复杂度 $O(2^n(n+m)\log n)$，可以通过子任务 3。

3.5 算法 5

仿照算法 4 的贪心，可以得到一个对原问题直接求解 $|S|$ 最大值的贪心算法。

初始令 S 为分数 $\leq v$ 的所有选手，令 S 中选手分数上界为 v，其余选手分数上界为 ∞。从左到右考虑每一场比赛，选择参与这场比赛且分数未到达上界的选手中，参赛区间右端点最靠左的一位作为胜者。如果找不到这样的选手，则取参与这场比赛的区间右端点最靠右的一位选手作为胜者，将其移除 S 集合，分数上界调到无穷大。

正确性证明：设考虑到比赛 x 时出现了所有参赛选手分数都达到上限的情况，由判定算法可知：所有参赛区间与 $[1, x]$ 有交的选手中至少有一个得分会超出上界，设这些选手的集合

为 S_0。设其中右端点最靠右的区间为 $[L,R]$，则无论选择哪位选手得分超出上界，$[R+1,m]$ 区间的比赛都必须在 S_0 之外的选手中选择胜者，而选择 $[L,R]$ 对应选手，则可以将比赛 $[1,R]$ 全部分配给 S_0 内选手，使得比赛 $[R+1,m]$ 不受影响，因此一定是最优的选择。

同样使用堆维护参与当前比赛的选手，从左到右扫一遍所有比赛即可得到答案，总复杂度 $O((n+m)\log n)$，可以通过子任务 4，5。

3.6 算法 6

考虑对算法 4 中的判定算法进行 dp。记 $a_{l,r}$ 表示在不考虑其他任何比赛的情况下，能否分配比赛 $[l,r]$ 的胜者使得所有参赛区间与 $[l,r]$ 有交的选手得分 $\le v$。

则集合 S 有解，当且仅当删去 S 外选手参与的比赛区间后，剩余比赛组成的每个区间的 a 均为 $true$。

将所有选手按照 l_i 从小到大排序重新编号，记 dp_i 表示已经分配好了 $1\sim l_i-1$ 比赛的胜者，钦定选手 i 分数 $>v$，删去了区间 $[l_i,r_i]$ 时，分数 $>v$ 的选手数量的最小值以及方案数。设 $l_0=r_0=0$，初始值为 $dp_0=\{0,1\}$。

则转移可以枚举下一个被删去的区间 $[l_j,r_j]$ 转移到 dp_j，若 $l_j>r_i$ 则需要额外满足 $a_{r_i+1,l_j-1}=1$ 才能转移。若 $a_{r_i+1,m}=1$ 则可以直接更新答案。

通过算法 4 中的判定算法，对于每个左端点 l，可以扫一遍 $[l,m]$，$O(m\log n)$ 对 $\forall r\in[l,m]$ 预处理出 $a_{l,r}$。预处理复杂度 $O(m^2\log n)$，转移复杂度为 $O(n^2)$，故总复杂度为 $O(m^2\log n+n^2)$，可以通过子任务 6。

3.7 算法 7

一个容易想到的猜测是：$\forall l\in[1,m]$，满足 $a_{l,r}=1$ 的 r 是一段以 l 为左端点的区间。

证明也是简单的：从 $[l,r]$ 到 $[l,r+1]$，只会增加一些以 $r+1$ 为左端点的区间，无法参与 $[l,r]$ 的比赛，故 $a_{l,r}=0$ 则 $a_{l,r+1}$ 也 $=0$。

记 $R(l)=\max_{r\ge l}[a_{l,r}=1]$，若 $a_{l,l}=0$ 则令 $R(l)=l-1$。如果求出了所有的 $R(l)$。则算法 6 中的转移相当于可以从 dp_i 花费 1 的代价转移到所有以 $[l_i,R(r_i+1)+1]$ 为左端的区间，于是可以用线段树将转移优化到 $O(n\log m)$。

求 $R(l)$ 则可以使用数据结构优化贪心，有很多种做法，这里介绍其中一种：

为了方便，记 $c_i=v-w_i$ 表示最多允许选手 i 在多少场比赛取胜，若 $c_i<0$ 则可以直接删去区间 $[l_i,r_i]$ 对左右两边分别处理。将所有区间按左端点从小到大排序后重新赋编号，则可将贪心判定时选择右端点最靠左的一位改为选择编号最小的选手。

考虑扫描线，从小到大处理每个 r，同时对 $\forall l\in[1,r]$ 维护 $b_{l,r}$ 表示对区间 $[l,r]$ 进行贪心判定后，所有参与比赛 r 的选手最多还能赢多少场比赛。若已经得到了 $a_{l,r}=0$ 则令 $b_{l,r}=-1$。从 $[l,r]$ 转移到 $[l,r+1]$ 时：对于右端点为 r 的区间 i，按编号从小到大依次删去它们，由于区间的单调性，所有包含 r 的区间在 $[l,r]$ 的判定中的优先级始终不变，故记 V

为其中编号 $>i$ 的区间的 c 之和。则若 $b_{l,r}\le V$，说明区间 i 已经达到了上限，可以直接删去不影响 b，否则将 b 变为 V；对于所有左端点为 $r+1$ 的区间 i，直接令 $b+=c_i$。处理完这些区间后再令所有 $b-=1$ 即可。

观察：$\forall 1\le l<r\le m, b_{l,r}\le b_{l+1,r}$。

证明：从 $[l+1,r]$ 到 $[l,r]$，只会增加一些以 l 为右端点的区间，无法参与到 $[l,r]$ 的比赛中，故 b 不会增大。

于是只需要二分找到满足 $b_{l,r}\le V$ 的前缀，问题就变成了区间赋值与区间加。使用线段树维护即可，这部分的复杂度为 $O((n+m)\log m)$。

最终复杂度为 $O((n+m)\log m)$，可以通过子任务 7。

4 Bonus

在区间不满足单调性时，本题也有一些有意思的多项式做法，不过由于出题人水平不够，只想出了下面的一个劣质做法，因此并没有出到互测中，在此仅作抛砖引玉。

首先算法 4 的贪心判定与算法 5 在一般情况下依然适用，可以 $\mathcal{O}(m\log n)$ 求解最小值。

还是考虑对集合 S 的判定：将不属于 S 的选手参与的比赛删掉，剩余的比赛组成若干个区间。此时每个区间不再独立，一名选手可能会参加两个区间的比赛。但当 $|S|$ 最大时，不会存在一个选手同时参与三个区间的比赛，否则可以将这三个区间之间的至少两个被删区间替换为删去该选手，$|S|$ 变大了。因此转移时，可以忽略这种情况。

于是考虑区间 $[l_1,r_1]$ 时只需要考虑上一个区间 $[l_0,r_0]$ 对跨过区 $[r_0,l_1]$ 的区间的影响。注意到无论这些区间的具体情况如何，在对 $[l_1,r_1]$ 进行贪心判定时，所有跨过 r_1 的区间之间的优先级始终不变，因此这些区间的被使用情况只有 $\mathcal{O}(m)$ 种，而只有这些区间会影响到下一个区间。因此可以记 $dp_{l,r,s}$ 表示某一段保留区间为 $[l,r]$，已经确定了 $[1,r]$ 比赛的胜者，跨过 r 的区间状态为 s 时的答案。

这样状态数是 $\mathcal{O}(m^3)$ 的，转移枚举下一个被删的区间 $[r+1,t]$，如果没有删去另一个与 $[r+1,t]$ 有交的区间，可以枚举下一个保留区间的右端点 r'，$\mathcal{O}(m)$ 扫一遍对所有右端点 r' 进行转移。

如果有，下一个被删区间 x 右端点一定超过 t，且那么 $[l,r]$ 不会影响下一个保留区间，可以枚举 x 转移到 g_x 表示删去了区间 x，已填好 $[1,r_x]$，且还有一个被删区间与 $[1,r_x]$ 有交时的方案数。g 可以转移到 g_y 满足 $r_x\in[l_y,r_y]$，也可以直接转移到 $f_{r_x+1,r',s}$ 上，需满足 $a_{r_x+1,r'}=1$，s 只与 r_x+1,r' 有关，可以预处理。

最终复杂度为 $\mathcal{O}(nm^3)$。

选手有更优/其他做法欢迎与出题人交流。