

楼梯 解题报告

麻省理工学院 钟子谦

维护楼梯

在本题中维护楼梯应该还是比较简单的。我们可以离散化之后用一个树状数组或树状数组维护每行的长度，支持区间加和单点查询。对于 $-$ 操作，我们可以二分出每个减到负的等值段并进行区间减。由于不会撤销 $-$ 操作，均摊复杂度是正确的（考虑连续段的个数）。

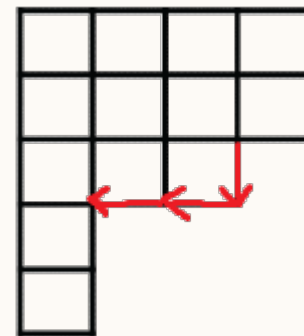
对于 m 较小的情形，考虑每一个离散化后的行区间，此时每个列生成出的边界格数是一个单调的区间（从上到下每行的边界格数每次 -1 ，越右边区间越小），我们可以在此基础上二分。

我们也可以通过双指针的手段进一步优化这一算法，细节比较繁琐，时间复杂度 $O(m^2) \sim O(m^2 \log^2)$ 。

关注右下边界

本题的主要难点可能在于关注正确的部分。我们考虑一个子楼梯的右下边界，把边界从上到下这样看成一个小线段，那么它一定是第一步 $\downarrow$ ，最后一步 $\leftarrow$ 。

反之亦然：把边界看成一个整体，那么每个以 $\downarrow$ 开头以 $\leftarrow$ 结束的子区间就都对应一个子楼梯。边界格数即为这段区间的长度-1。



中值定理

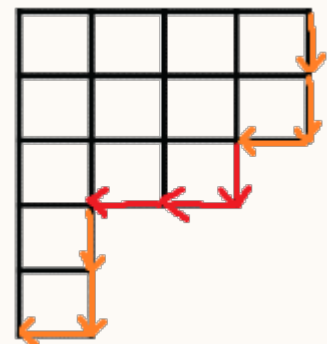
我们把原楼梯右下边界写成一个 $\{\downarrow, \leftarrow\}$ 组成的序列 $\mathbf{a}$ ，那么它的长度就为边界格数加一，以 $\downarrow$ 开头，以 $\leftarrow$ 结尾，即 $\mathbf{a}[0]=\downarrow$ ， $\mathbf{a}[p]=\leftarrow$ （假设 $p>0$ ）。

我们需要找的就是满足 $a[i]=\downarrow$, $a[i+q]=\leftarrow$ 的任意一个 i 。由于 $q|p$, 考虑 $a[0], a[q], a[2q] \dots a[p]$, 第一个 $\leftarrow$ 的位置就符合题意。

我们可以用二分加速这一过程，就假设 $a[l*q]=\downarrow$ ， $a[r*q]=\leftarrow$ ，然后每次看 $a[mid*q]$ 的值来递归到左右两边。

查询 **a** 每一位的值可以在之前维护的线段树上二分。

时间复杂度 $O(m \log(m) \log(1e18))$ 。



扩展

- 如何将询问扩展到不为边界格数因子的情况？
 - 根据之前的分析，相当于要在附加修改的情况下维护一个01序列是否有 $a[i]=0, a[i+k]=1$ 。正常的方法似乎只能找到是否有 $a[i] \neq a[i+k]$ ，对每种余数都是先1后0的情况似乎无能为力。静态的情形都已经比较困难。
- 询问能做到一个 $\log$ 吗？
 - 好像也比较困难。
- 咋啥都比较困难？
 - 水平有限

题外话

- 本题中定义的楼梯其实就是杨表 young tableau，而这里定义的子楼梯边界格数一般被称为 hook length，也有著名的 hook length formula，钩子公式。对其他杨表相关知识感兴趣的同学可以阅读袁方舟19年论文集集中的《浅谈杨氏矩阵在信息学竞赛中的应用》等文献。
- 本题数据构造十分困难，但应该还是努力造出了有一定强度的数据（写了 17kb 的生成器 >_<）

谢谢大家

欢迎提问！