

1. 题意

对于长度为 n 的序列 a , 定义 $f(a) = \frac{1}{\prod_{i=k}^n s_i}$, 其中 s_i 为 $\{a_n\}$ 的前缀和数组, k 是给定的常数且

$$1 \leq k \leq 2.$$

考虑所有满足以下三个条件的序列 a :

- a 的长度为 n 。
- $\forall i, j, a_i \neq a_j$ 。
- $1 \leq a_i \leq m$ 。

求它们的 $f(a)$ 之和, 答案对 p 取模。保证 p 是一个质数。

$$1 \leq n \leq 100, 10^8 < p < 1.07 \times 10^9, 1 \leq k \leq 2.$$

2. 解法

2.1. 解法 1

考虑状压 dp, dp_S 表示目前序列包含了 S 中的元素的所有序列的前缀和之积的倒数之和。转移就每次加入一个数即可, 预处理乘法逆元和子集和可以做到 $O(2^m \cdot m)$ 。

期望得分 10 分。

2.2. 解法 2

对于此题而言, 一个比较棘手的地方在于如果我们尝试用前缀信息的角度进行 DP, 那么记录的信息量是 $O(2^n)$ 级别的, 而如果我们尝试对 x_i 互不相同的限制进行容斥, 也很难摆脱掉指数级的限制, 因此我们尝试换个思路。

考虑 $k = 1$, 我们为这个式子赋予一个组合意义: 有 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 个球, 其中第 i 种颜色的球有 a_i 个, 且同种颜色的球之间彼此不可区分。我们要将它们排成一排, 设 r_i 为最靠右的颜色为 i 的球的位置, 那么考察满足 $r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_n$ 的排列方法的个数, 我们将颜色 $1 \sim n$ 的球依次插入排列, 插入颜色 i 时, 满足“颜色 $1 \sim i$ 的球中最靠右的球颜色为 i ”的概率为 $\frac{a_i}{s_i}$, 将它们乘起来, 可以得到符

合条件的排列数占总排列数的比例为 $\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n s_i}$ 。

另一方面, 考虑 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ 的序列的所有排列, 对于任一将这 $\sum a_i$ 个球排成一列的方案, 假设排列 p 满足 $r_{p_1} < r_{p_2} < r_{p_3} < \dots < r_{p_n}$, 那么这种排列方案会恰好对 $a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_n}$ 这个序列产生 1 的贡献。这样我们设 $g(a) = \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n s_i}$ 。得到了一个很重要的结论: a 的所有排列的

$g(a)$ 之和等于 1。而 $\prod_{i=1}^n a_i$ 是定值, $\frac{1}{\prod_{i=1}^n s_i}$ 就是我们要求的 $f(a)$ 。因此 a 所有排列的 $f(a)$ 之和等于

$\frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i}$ 。这样答案相当于求 $\sum_{S \subseteq \{1, 2, 3, \dots, m\}, |S|=k} \prod_{x \in S} \frac{1}{x}$, 直接背包即可, 时间复杂度 $O(n^2)$ 。

这样我们解决了 $k = 1$ 的问题。期望得分 25 分。

2.3. 解法 3

考虑 $k = 2$ ，还是从组合意义入手解决问题。与 $k = 1$ 不同的是这里多了一个 a_1 的系数，因此我们考虑先枚举 a_1 。考虑如果我们固定了 $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ 组成的集合 S 怎么计算贡献，也就是 $n = m$ 的部分分。类比 $k = 1$ 可知我们要统计将 $\sum a_i$ 个球排成一排，且 r_i 最靠左的颜色是颜色 1 的排列方法个数，除以总排列个数也就是 $\frac{(\sum a_i)!}{\prod a_i!}$ 累加入答案。考虑如何计算方案数，如果我们要让所有 r_i 都比 r_1

大，那么方案数并不好计算。这时候我们可以尝试容斥。我们钦定一个集合 $T \subseteq S$ ，要求这个集合中的颜色的 r 必须小于 r_1 ，那么统计这个方案数分成三部分：先将 T 中的相对顺序钦定好，方案数为

$\frac{st!}{\prod_{x \in T} x!}$ ，其中 $st = \sum_{x \in T} x$ ；插入 a_1 个颜色 1，方案数为 $\binom{a_1 + st - 1}{st} = \frac{(a_1 + st - 1)!}{st!(a_1 - 1)!}$ ，插入剩余

的颜色，方案数为 $\frac{(\sum a_i)!}{(st + a_1)! \cdot \prod_{x \in S, x \notin T} x!}$ ，三者相乘可得总方案数为 $\frac{(\sum a_i)! \cdot a_1}{(st + a_1) \prod a_i!}$ ，除以总方案数

之后恰好只剩 $\frac{a_1}{st + a_1}$ ，再乘以容斥系数就是 $\frac{a_1}{st + a_1} \cdot (-1)^{|S|}$ 。换句话说我们，如果我们固定了 S ，

那么总贡献就是 $\sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|} \cdot \frac{a_1}{a_1 + \sum_{x \in T} x}$ 。

接下来考虑不固定 S 的情况，我们考虑 DP， $dp_{i,j,k}$ 表示考虑了 $1 \sim i$ ，目前 S 中有 k 个数， T 中的所有数之和是 j 的容斥系数之和，转移就考虑下一个数，分不属于 S ，属于 S 但不属于 T 和既属于 S 又属于 T 的情况转移即可。总复杂度 $O(n^5)$ 。然后发现其实我们并不需要枚举 a_1 ，只需要在 DP 状态中额外记录一维 0/1 表示 a_1 选没选过就行了，这样复杂度就降到了 $O(n^4)$ 。

3. 总结

本人大概是做 UOJ #390 百鸽笼时由那道题的容斥思路联想到的这个题，难点在于想到组合意义转化以及想到这一步容斥，可能这两题的组合模型有相似之处，所以这题大概只能算个改编题，不过还是希望大家能够从中学到东西。

此外，感谢闫陈效、魏佳泽、程思元同学的验题。