

NOI 2017天津市代表队选拔赛 day2题解

大中锋的游乐场

如果没有可乐汉堡的限制，就是一道很简单的最短路，所以我们也考虑在最短路上做文章。对于每个点，有效状态是有限的。用Ca表示喝了可乐的数量，用Cb表示吃了汉堡的数量，有效的状态点其实是 节点数量*(2k + 1) 个。所以我们在进行最短路的时候保存dist[i][j]的值。i表示到达第i个节点，j表示(Ca - Cb) == j，然后进行最短路即可。由于数据构造算法的问题，题目可能会卡掉一部分的spfa，由于spfa的玄学复杂度问题，建议使用dijkstra。

甲苯先生和大中锋的字符串

题意为找出仅出现k次的子串集合 x_k ，然后统计出现次数最多的子串长度。由IOI2009 国家集训队论文 后缀数组 罗穗骞 后缀数组 处理字符串的有力工具的论文中 2.2.2子串的个数，可以知道，k=1的情况仅出现1次的子串个数为 $\sum n - sa[i] + 1 - height[i]$

考虑更普遍的情况可得 $\min\{height[i+1], height[i+2], \dots, height[i+k-1]\} - \max\{height[i], height[i+k+1]\}$ 即以sa[i]为开头的子串，仅出现k次的子串长度的上界是sa[i]到sa[i+k-1]的最长公共前缀长度；下界为与这k个串相邻的串和这k个串的最长公共前缀+1。

因而问题就转化为已知n个区间，求覆盖最多次点的最大值为多少，使用一种数据结构维护即可。

甲苯先生的线段树

第一问比较简单 直接求通过/2求lca即可。但是通过第一问需要发现如下规律，存在一个序列 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ ，满足 $x_1 = 1, x_i/2 = x_{i-1}$ ，那么 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = 2 * (x_k) - BitCount(x_k)$ 其中 $BitCount(x_k)$ 表示 x_k 的二进制表示中1的个数。其实就是本题目中从root到节点 x_k 的一条路径。

通过第一问，第二问就是求出能够组合出sum的方案数。

在该满二叉树中，简单路径的情况可以归纳为从lca往两端延长的形状。因

而可以想到枚举lca和两端路径的深度，对于每种情况，通过数位dp进行求解。问题可以分为以下两个问题

问题1，枚举

问题是枚举lca是否是合理的呢。通过简单的计算可以发现的是，当lca的两端路径深度固定时。对于lca为编号x的最大构造方案也小于lca为编号x+1的最小构造方案，因而其实不同枚举lca，只需要枚举两端路径的高度即可，然后通过计算不难求出lca。该问题的复杂度为 $O(d^2)$

问题2，数位dp

解决了问题1，可以通过对sum减去一定的值得到 sum' ，将问题从以lca为根节点转化为以root为根节点的问题。结合上面发现的规律，原问题可以表示成求有多少种方案满足长度为L的二进制数 x_l 和长度为R的二进制数 x_r 满足 x_l+x_r -二进制数中1的个数= sum' ，那么只要在 $[0,L+R]$ 的区间里枚举1的个数，即可通过数位dp求出方案数。该问题的复杂度也为 $O(d^2)$ ，同时有一个较大的常数

所以总的复杂度为 $O(d^4)$