

NOI 2016天津市代表队选拔赛 day2题解

Contents

A game	2
B sum	2
C str	3

A game

对于20%数据的做法：因为能放炸弹的地方一共就20个点，因而直接用状态压缩，然后对于每一个状态，判断是否合法，取最大值即可。复杂度 $O(n^2 2^n)$

对于100%数据的做法：一个炸弹的范围是一行和一系列，可以看做一个炸弹占据了所在的一行和一系列，这样就可以用二分图求最大匹配来做。但是现在问题多出了硬石头和软石头的限制，因而需要对地图进行预处理，求出所有的行联通个数和列联通个数，作为二分图两边的点，最后求一遍最大匹配即可。假设二分图一端点数为 n ，图中边数为 m ，复杂度为 $O(nm)$

B sum

对于50%的数据的做法：

直接按照给出的公式进行计算即可。

时间复杂度为 $O(n^2)$

对于100%的数据的做法：

我们将第二类斯特林数记为 $S(n, k)$ 。

我们大家都熟悉Bell数：

$$B_n = \sum_{i=0}^n S(n, i)$$

我们试着对Bell数进行扩展：

$$C_n = \sum_{i=0}^n S(n, i) \times i!$$

我们来分析一下这个扩展(Ordered Bell Number)的形式的组合意义：将 n 个物体分成若干等价类，同时这些等价类之间是有相对顺序的。

知道了组合意义后，我们很容易求出 C_n 的递推形式：

$$C_n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \times C_{n-i}$$

我们比较下ordered Bell number的形式与我们所要求的形式就会找到题中所给形式的组合意义：我们只需要再为每个等价类增加一个额外的二值属性即可。

因此我们可以方便的求出

$$G_n = \sum_{j=0}^i S(i, j) \times 2^j \times j! \quad (1)$$

$$= \sum_{j=1}^i 2 \times \binom{i}{j} G_{n-i} \quad (2)$$

$$= \sum_{j=1}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} G_{n-i} \quad (3)$$

变形后可得：

$$\frac{G_n}{n!} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \times \frac{G_{n-i}}{(n-i)!}$$

这是一个非常明显的卷积形式。利用NTT（数论变换）与CDQ分治，可以通过100%的数据。

时间复杂度为 $O(n \lg^2 n)$

C str

由于我们要求的是最长公共前缀，所以 $s[a..b]$ 的所有子串其实和 $s[a..b]$ 的所有后缀是等价的

对于10%的数据，暴力尝试即可。对于每次询问，暴力尝试 $[a..b]$ 内的所有后缀，与 $[c..d]$ 进行比较 – 复杂度 $O(m * n^2)$

对于40%的数据，有多种做法。

1. 将答案按照c排序，对于每个c，做一个扩展kmp，然后对于每次询问，可以通过扩展kmp的结果 $O(1)$ 的知道 $[a..b]$ 内的后缀与 $[c..d]$ 的最长公共前缀。不离线也可以，不过需要 $O(n^2)$ 的空间 – 复杂度 $O(n^2)$

2. 与上种做法相同，不过判断时使用二分答案+hash的方法而不是kmp，复杂度略高些，但是也可以过。完全不需要离线。注意不要写的常数太大。 – 复杂度 $O(n^2 \log n)$

3. 与前两种方法不太相同，将答案按照a降序排序。不断将后缀插入到字典树中，并在字典树的节点上记录能够构成这个前缀的最早位置。对于每个询问，直接在字典树上查找即可。- 复杂度 $O(n^2)$ 空间占用较大

对于100%的数据，继续沿用上一个思想，将答案按照a降序排序。

求出后缀数组，对于每个询问，二分答案，找到与[c..d]公共前缀长度大于等于答案的所有后缀，查看是否有在[a..b]范围内的 查看是否有在[a..b]范围内的可以通过一个线段树来维护，有点修改和区间查询最小值。每次在满足条件的后缀区间内查询起始点的最小值，看是否在[a, b - ans]范围内。- 复杂度 $O(m\log^2n)$

求后缀数组 $n\log n$ ，离线排序 $m\log m$ ，二分答案 $m\log n$ ，对于每个二分出的答案，二分求出满足条件的区间左右端点 $m\log^2n$ ，线段树查询区间最小值 $m\log^2n$ ，线段树更新 $n\log n$