

KUPC2020 K: Deleting Edges

原案, 作成: yamunaku

C_i の偶奇が等しい 2 頂点を結ぶ辺を赤色、異なる 2 頂点を結ぶ辺を青色で塗ります。

ひとつの頂点 v に注目します。操作において取り除く辺のうち、端点の一方が v であるようなものについて、その色を取り除く順番で並べると、赤・青・赤・青・……となるはずですが、取り除く辺の集合 U を決めたとき、 U は次の条件を満たさなければなりません。

どの頂点 v についても、

$$\begin{aligned} & (U \text{ に含まれ、端点の一方が } v \text{ である 青い辺の数}) \\ & \leq (U \text{ に含まれ、端点の一方が } v \text{ である 赤い辺の数}) \\ & \leq (U \text{ に含まれ、端点の一方が } v \text{ である 青い辺の数}) + 1 \end{aligned}$$

を満たす。

実はこの条件は、 U が取り除く辺の集合であるための必要条件だけではなく、十分条件にもなっています。(証明は省略)

この条件を満たす U のうち、サイズ $|U|$ が最も大きいものを求めましょう。入力されるグラフの辺の番号の集合を E とし、各辺 $i \in E$ について、最終的にその辺を取り除いているかどうかを表す変数 $x_i = 0, 1$ を考えます。 $x_i = 1$ のとき、辺 i は取り除かれていて、 $x_i = 0$ のとき、辺 i は残っていることにします。さらに、頂点の集合を V 、赤い辺の番号の集合を R 、青い辺の番号の集合を B とすると、次のような 0-1 整数計画問題になります。

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in E} x_i \rightarrow \text{最大化} \\ & \sum_{\substack{i \in B \\ v \in \{a_i, b_i\}}} x_i \leq \sum_{\substack{i \in R \\ v \in \{a_i, b_i\}}} x_i \leq 1 + \sum_{\substack{i \in B \\ v \in \{a_i, b_i\}}} x_i \quad (v \in V) \\ & x_i = 0, 1 \quad (i \in E) \end{aligned}$$

スラック変数 $s_v = 0, 1$ ($v \in V$) を導入すると、この問題は次のように書き換えることができます。

$$\sum_{i \in E} (-1) \times x_i + \sum_{v \in V} 0 \times s_v \rightarrow \text{最小化}$$

$$\sum_{\substack{i \in R \\ v \in \{a_i, b_i\}}} x_i = s_v + \sum_{\substack{i \in B \\ v \in \{a_i, b_i\}}} x_i \quad (v \in V)$$

$$x_i = 0, 1 \quad (i \in E), \quad s_v = 0, 1 \quad (v \in V)$$

さらに、 $1 \leq a_i \leq N_1$ 、 $N_1 + 1 \leq b_i \leq N_1 + N_2$ を踏まえると、

$$\sum_{i \in E} (-1) \times x_i + \sum_{v \in V} 0 \times s_v \rightarrow \text{最小化}$$

$$s_v + \sum_{\substack{i \in B \\ v = a_i}} x_i = \sum_{\substack{i \in R \\ v = a_i}} x_i \quad (1 \leq v \leq N_1)$$

$$\sum_{\substack{i \in R \\ v = b_i}} x_i = s_v + \sum_{\substack{i \in B \\ v = b_i}} x_i \quad (N_1 + 1 \leq v \leq N_1 + N_2)$$

$$x_i = 0, 1 \quad (i \in E), \quad s_v = 0, 1 \quad (v \in V)$$

となります。ここで、2 番目の式と 3 番目の式について和をとると、

$$\sum_{1 \leq v \leq N_1} s_v = \sum_{N_1 + 1 \leq v \leq N_1 + N_2} s_v$$

が成立します。したがって、この問題は次のように言い換えることができます。

赤い辺は a_i から b_i への向きをつけ、青い辺は b_i から a_i への向きをつける。これらの辺の容量を 1, コストを -1 とする。

新たな頂点 s, t を用意する。頂点 s から頂点 v ($1 \leq v \leq N_1$) へ、容量 1, コスト 0 の辺を張る。頂点 v ($N_1 + 1 \leq v \leq N_1 + N_2$) から頂点 t へ、容量 1, コスト 0 の辺を張る。

s から t への、流量任意の最小費用流を求めよ。

適切に負コストの辺を除去すると、この問題は Primal-Dual を用いて $O((N + M)^2 \log(N))$ で解くことができます。