Opisi algoritama

Zadatke, testne primjere i rješenja pripremili: Patrick Pavić, Ivan Paljak i Krešimir Nežmah. Primjeri implementiranih rješenja dani su u priloženim izvornim kodovima.

Zadatak A – Ascii Art

Predložio: Ivan Paljak
Potrebno znanje: osnove programiranja, implementacija

Ovo je u potpunosti implementacijski zadatak. Bilo je potrebno pažljivo pročitati tekst zadatka, implementirati ono što piše u njemu piše i pokriti sve slučajeve poput uključivanja ishodišta u sliku iako se ono ne nalazi u najmanjem ograničavajućem okviru istaknutih točaka.

Zadatak B – Brzi Biljar

Predložio: Krešimir Nežmah
Potrebno znanje: osnove geometrije, provjera je li točka na pravcu

Za 0 odbijanja odgovor je očito uvijek 1.

Pogledajmo prvo kako riješiti zadatak za $k = 1$. Reflektirajmo stol preko sve četiri stranice tako da dobijemo četiri kopije stola, svaki sa svojom reflektiranom rupom. Sada umjesto da gađamo pravu rupu s izlomljenom putanjom, možemo zamisliti da gađamo jednu od četiriju imaginarnih rupa s potpuno pravocrtnom putanjom.

Za veće k analogno popločimo cijelu ravninu s reflektiranim kopijama stola te tada svaka imaginarna rupa odgovara određenoj izlomljenoj putanji na pravom stolu. Svaku kopiju stola možemo označiti uređenim parom (x, y) koji označava da na putu do tog stola u ravnini treba x puta refektirati vertikalno i y puta horizontalno. Originalni stol naravno ima oznaku $(0, 0)$. Ako stol ima oznaku (x, y) onda je broj odbijanja na putu do pripadajuće imaginarne rupe jednak $|x| + |y|$.

Zadatak rješavamo tako da redom od $k = 0$ do $k = n$ prođemo po svim parovima (x, y) za koje je $x+y = k$ (kojih ima $\mathcal{O}(k)$) te uračunamo putanju za taj stol. Potrebno je paziti da se na tom pravcu nije dosad našla već neka druga rupa ili neki od vrhova stola. Zato je potrebno pamtiti koeficijente smjera već obiđenih pravaca u nekoj strukturi (npr. `std::set`) kako bi provjerili postoji li već taj pravac od prije. Nakon obrađivanja stolova za određeni k, u strukturu dodajemo nove pravce. Koeficijente smjera pravaca najlakše je pamtiti kao par cijelih brojeva koji predstavlja do kraja skraćen razlomak. Ukupni broj obiđenih stolova je $\mathcal{O}(n^2)$ pa je ukupna složenost $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

Zadatak C – Carska Civilizacija

Predložio: Krešimir Nežmah
Potrebno znanje: dinamičko programiranje, optimizacije prijelaza

Ako je udaljenost dvije uzastopne izabrane postaje jednaka d, označimo s $f(d)$ ukupno zadovoljstvo svih stanovnika s tom vožnjom duljine d, tj. $f(d) = |d-d_1|+\ldots+|d-d_n|$. Umjesto da sumiramo zadovoljstvo po stanovnicima, lakše je promatrati ukupno zadovoljstvo kao sumu od $f(d)$ po svim vožnjama.

To dovodi do rješenja dinamičkim programiranjem. Neka $dp[i]$ označava najveće zadovoljstvo ako moramo uzeti postaju broj 1 i broj i te neke između njih. Stanja ima n, a prijelaz računamo u $\mathcal{O}(n)$ tako što biramo preko koje postaje ćemo napraviti vožnju sa i. Prijelaz je moguće ubrzati koristeći svojstva funkcije f. Naime, kako je f nastala sumiranjem apsolutnih vrijednosti (koje su konveksne funkcije), onda je i funkcija f konveksna.

Recimo da smo u dinamici trenutno na poziciji i te da promatramo dva potencijalna prijelaza na pozicijama a i b ($a < b$). Prijelaz preko a donosi $dp[a] + f(x_i - x_a)$, a preko b donosi $dp[b] + f(x_i - x_b)$. Zbog konveksnosti, razlika $(dp[a] - dp[b]) + f(x_i - x_a) - f(x_i - x_b)$ s obzirom na fiksne a i b u odnosu na i je rastuća. To znači da binarnim pretraživanjem možemo pronaći indeks i za koji će prijelaz a *prestići* prijelaz b. Ključno je uočiti da nakon tog trenutka prijelaz b više nikad ne može biti optimalan pa ga ne trebamo više promatrati.

Prilikom obilaska stanja u povezanoj listi potrebno je pamtiti skup prijelaza kandidata koji bi u nekom trenutku mogli postati optimalan prijelaz. U svakom trenutku vrijedit će da su ti prijelazi sortirani po veličini, stoga je optimum uvijek na krajnjem desnom kraju. Za svaka dva susjedna prijelaza binarnim pretraživanjem odredimo trenutak u kojem će jedan prestići drugog. Ta prestizanja promatramo kao događaje koje pamtimo u globalnoj strukturi i izvršavamo u odgovarajućem trenutku. Na taj način jedino što preostaje je podržati brisanje iz takve strukture. Prilikom brisanja, prethodnik i sljedbenik izbrisanog prijelaza postat će susjedni pa sada za njih računamo trenutak prestizanja. Dodavanjem u strukturu nakon obrađivanja svakog stanja nastaje novi par za prestizanje pa se to rješava analogno brisanju.

Funkciju f moguće je unaprijed izračunati u složenosti $\mathcal{O}(m \log m + maxd)$ ili u složenosti $\mathcal{O}(\log m)$ po pozivu uz prethodno sortirani niz d-ova.

Ukupna složenost je $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ ili $\mathcal{O}(n \log n + maxd)$.

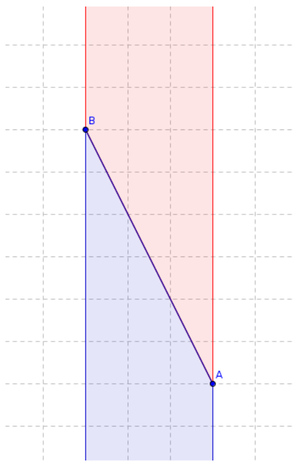
Zadatak D – Drugi Dio

Predložio: Patrick Pavić
Potrebno znanje: osnove geometrije

Neka točke A i B tvore optimalno rješenje. Neka je kut između dužine $\overline{AB}$ i pravca paralelnog s x osi označen s ϕ. Sada početni izraz možemo raspisati na sljedeći način ako uzmemo da je D euklidska udaljenost tih točaka:

$$\frac{D \sin \phi + D \cos \phi}{D} = \sin \phi + \cos \phi$$

Taj izraz se minimizira kada je ϕ što bliže 0 il 90 stupnjeva. Promatrat ćemo dva slučaja, najbliže 0 stupnjeva i najbliže 90 stupnjeva. Slučajevi su analogni stoga promatrajmo slučaj 90 stupnjeva. Pogledajmo sljedeći crtež.



Budući da se radi o optimalnom rješenju, u crvenom se području ne smije nalaziti točka jer bi ona zatvarala veći kut s točkom A, odnosno u plavom području s točkom B. Iz toga slijedi da kada sortiramo točke po x-koordinati one se nalaze na susjednim mjestima. Preostaje samo provjeriti sve susjedne parove. U drugom slučaju sve vrijedi analogno, jedino sortiramo po y-koordinati.

Zadatak E – Ekstremna Ekspedicija

Predložio: Patrick Pavić
Potrebno znanje: vjerojatnosti, očekivanja, rad sa stablima, LCA

Promatrajmo put između čvorova A i B. Označimo čvorove na tom putu redom $A = v_1, v_2, \ldots, v_k = B$. Neka $E[U; V]$ označava očekivanu duljinu puta između tih dvaju čvorova. Zato što se radi o stablu vrijedi sljedeće:

$$E[A; B] = E[v_1; v_2] + E[v_2; v_3] + \ldots + E[v_{k-1}; v_k]$$

Sada preostaje samo izračunati $E[a_i; b_i]$ odnosno $E[b_i; a_i]$ za svaki brid te pozbrajati redom. To zbrajanje može se izvršiti pomoću LCA algoritma i prefiks suma u $\mathcal{O}(\log N)$ po upitu uz $\mathcal{O}(n \log n)$ predizračun.

Zamislimo neki brid (u, v). Trenutno se nalazimo u čvoru u te želimo napraviti korak do čvora v. Neka $deg(u)$ označava stupanj tog čvora. Postoji vjerojatnost $\frac{(deg(u)-1)}{deg(u)}$ da ćemo otići u komponentu s čvorom u maknemo li brid (u, v). Zanima nas očekivano vrijeme prije nego što ponovno dođemo u čvor u. Prema stacionarnoj distribuciji u Markovljevim lancima, to je $\frac{D}{(deg(u)-1)}$ gdje je D suma svih stupnjeva čvorova u tom grafu, tj. u ovom slučaju toj komponenti. To vrijeme ćemo nazvati $E[vraćanja]$. Tada dobivamo sljedeći izraz:

$$E[u; v] = \frac{deg(u) - 1}{deg(u)}(E[vraćanja] + E[u; v]) + \frac{1}{deg(u)}$$

$$deg(u)E[u; v] = (deg(u) - 1)E[vraćanja] + (deg(u) - 1)E[u; v] + 1$$

$$E[u; v] = \frac{D(deg(u) - 1)}{deg(u) - 1} + 1$$

$$E[u; v] = D + 1$$

Iz toga slijedi da je očekivano vrijeme da prijeđemo iz čvora u u susjedni čvor v zapravo zbroj svih stupnjeva čvorova u komponenti koja sadrži čvor u koju dobijemo kada maknemo taj brid. Sada je lagano odgovoriti na upite.

Zadatak F – Fenomenalni Fenjer

Predložio: Ivan Paljak
Potrebno znanje: Osnove geometrije, *sweep-line* algoritam

Primijetimo najprije da možemo ignorirati sve točke čija je y-koordinata po apsolutnoj vrijedonsti strogo veća od radijusa kružnice r.

Zamislimo da guramo zadanu kružnicu po x-osi slijeva nadesno te primijetimo da će se svaka točka najprije biti desno od kružnice, potom će *udariti* u desni dio kružnice, pa će se nalaziti unutar kružnice sve dok ne *udari* u njen lijevi rub i nakon toga zauvijek izađe iz kružnice. Promatrajmo za svaku točku (kuću) sve moguće vrijedonst x-osi središta kružnice (fenjera) dok se ta točka nalazi na rubu ili u unutrašnjosti kružnice. Primijetit ćemo da te vrijednosti čine $interval$ na $x - osi$.

Ako za svaku točku izračunamo o kojem se intervalu radi, zadatak smo sveli na sljedeći problem: zadano je n intervala na x-osi, odredi najveći broj intervala koji sadrže neku zajedničku točku. Ovaj problem jednostavno možemo riješiti koristeći *sweep-line* algoritam. Odnosno, prolazit ćemo po krajnjim točkama intervala slijeva nadesno i putem pamtiti trenutni broj otvorenih intervala. Kada detektiramo početak nekog intervala, broj otvorenih intervala porast će za 1, a u protivnom će se smanjiti za 1. Najveći broj otvorenih intervala kojeg zateknemo u nekom trenutku našeg algoritma predstavlja rješenje zadatka.

Vremenska složenost je $\mathcal{O}(n \log n)$,

Zadatak G – Gospodar Gljiva

Predložio: Patrick Pavić
Potrebno znanje: napredna kombinatorika

Rješenje zadtatka je $\binom{mn}{n} \cdot \frac{1}{n(m-1)+1}$. Takve skupove brojeva možemo promatrati kao stabla spojimo li svaki čvor x s čvorom $\lfloor \frac{x-1}{k} \rfloor$. Tada zapravo brojimo nešto što se zove k-*ary tree*, tj. poopćenje binarnih stabla. U slučaju za $k = 2$ rješenje je zapravo n-ti Catalanov broj, a općenito rješenje je tzv. *Fuss Catalan* broj. Više o tome na sljedećoj poveznici.

Zadatak H – Hvalevrijedan Hitac

Predložio: Ivan Paljak
Potrebno znanje: DFS obilazak stabla, pophlepni algoritmi

Rješenje postoji ako i samo ako je broj zelenih meta neparan.

Pokažimo prvo da rješenje ne postoji ako je broj zelenih meta paran. Dokaz je induktivan. Ako nema zelenih meta, očito je nemoguće. Inače, biranjem bilo koje zelene mete, stablo se raspada na više komponenti (ne brojeći originalni čvor) koje u zbroju imaju neparan broj zelenih meta. To je moguće samo ako barem jedna od komponenti ima neparno mnogo zelenih meti. Nakon promjene boje u toj komponenti, ona će imati parno mnogo zelenih meta pa induktivno neće postojati rješenje za tu komponentu.

Analogno induktivno razmišljanje za neparni broj meta pokazuje da je potrebno pronaći metu takvu da sve preostale komponente imaju paran broj zelenih meta. Jedan način za napraviti validan izbor je ukorijeniti stablo u bilo kojem čvoru te uvijek odabirati najdublju zelenu metu. Dubine svakog čvora moguće je odrediti dfs obilaskom stabla, a pronalaženje najdubljeg čvora u svakom trenutku moguće je koristeći prioritetni red. Nakon biranja čvora potrebno ga je označiti kao obrađenog, promijeniti boju susjedima te ih potencijalno ih ubaciti u prioritetni red.

Ukupna složenost je $\mathcal{O}(n \log n)$.

Zadatak I – Izvanredna Isplata

Predložio: Krešimir Nežmah
Potrebno znanje: osnovno dinamičko programiranje, ograničavanje odgovora

Neka $opt(x)$ i $grd(x)$ označavaju redom koliko je najmanje kovanica potrebno da bi se isplatio iznos x te koliko bi kovanica potrošio pohlepni algoritam. Sustav kovanica nije izvanredan ako i samo ako postoji protuprimjer, tj. prirodni broj k takav da je $opt(k) \neq grd(k)$.

Označimo s k najmanji takav protuprimjer. Ključna zamjedba je da takav protuprimjer ne može biti prevelik, ograničen je sa $2 \cdot c_n$.

Dokaz

Ako je k najmanji protuprimjer, to je najmanji broj za koji postoji c_i takav da je $grd(k) \neq grd(k - c_i) + 1$. Kada bi vrijedilo $k \geq c_n$ i $k - c_i \geq cn$, onda bi također vrijedilo $grd(k - c_n) \neq grd(k - c_i - c_n) + 1$, što je u kontradikciji s minimalnošću od k. Dakle, mora vrijediti $k - c_i < c_n$, pa je $k < 2 \cdot c_n$.

Preostaje provjeriti poklapaju li se vrijednosti od $opt(x)$ i $grd(x)$ za prvih $2 \cdot c_n$ prirodnih brojeva, što se može napraviti jednostavnom primjenom dinamičkog programiranja u složenosti $\mathcal{O}(n \cdot c_n)$.

Zadatak J – Jači Jovsi

Predložio: Patrick Pavić
Potrebno znanje: olbat stablo, dinamičko programiranje

Izgradimo *olbat stablo* (*palindromsko stablo*, *eertree*) nad nizom znakova. Sada ćemo dinamičkim programiranjen izračunati odgovor za svaki čvor (tj. palindrom) te ga pomnožiti s brojem pojavljivanja u nizu. Za svaki čvor X postoji čvor BK – najveći palindrom koji je sufiks palindroma X te PAR što je palindrom koji nastaje micanjem prvog i zadnjeg znaka iz tog palindroma. U olbat stablu to su čvor u koji pokazuje backedge i čvor koji je roditelj tog čvora, zato oznake BK i PAR. Stanje dinamike će se sastojati od oznake između 0 i 2 te čvora X.

Oznaka 1: rješenje kad bismo u prvom potezu ostavili baš taj palindrom
Oznaka 0: kada bismo ostavili ili taj palindrom ili bilo koji palindrom koji je prefiks početnog.
Oznaka 2: kada bismo u prvom potezu ostavili ili taj palindorm ili bilo koji podpalindorm.

Podpalindrom palindroma X je svaki palindrom koji se nalazi kao podriječ unutar X.

Prijelazi dinamike su:

$$\begin{aligned} dp(X,1) &= dp(PAR,2) + 1 \\ dp(X,0) &= dp(BK,0) + dp(X,1) \\ dp(X,2) &= dp(PAR,2) + dp(X,1) + 2 \cdot dp(BK,0) \end{aligned}$$

Završni odgovor za čvor X spremljen je u $dp(X,1)$.

Vremenska složenost je $\mathcal{O}(n)$.

Zadatak K – Klasična Karantena

Predložio: Ivan Paljak
Potrebno znanje: sortiranje, pohlepni algoritmi

Razmatrat ćemo slučaj u kojem pokušavamo maksimizirati broj ljudi s maskama u birtiji. Minimizacija broja maski je analogna.

Pretpostavimo da smo pronašli neki optimalan poredak ljudi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koji maksimizira broj maski u birtiji. Promatrajmo kako izgleda niz $p_{a_1}, p_{a_2}, \ldots, p_{a_n}$. Preciznije, promatrat ćemo neka dva susjedna elementa a_i i a_{i+1} za koje vrijedi $p_{a_i} > p_{a_{i+1}}$. Primijetimo da kada bismo tim elementima zamijenili mjesta, broj ljudi s maskama u birtiji mogao bi samo narasti. Stoga zaključujemo da poredak ljudi uzlazno sortiran po vrijednostima p_i također rezultira maksimalnim brojem ljudi s maskama.