



# ioitrain 2015

## Breaking Bomber 试题讲解

计25 梁盾

# 问题描述

- ▶ 药剂师 Luo 是液态爆炸物方面的专家, 在他的实验室里有  $n$  类液态药剂, 每一类液态药剂都有很多副, 这些药剂由四种化学元素组成, 这里依次称之为 alpha, beta, gamma, delta, 每一类药剂都只由这四种液态化学元素组成, 这里我们认为第  $i$  类药剂依次含有的这四种元素  $a(i), b(i), c(i), d(i)$  克.  
药剂师 Luo 经常收到两类客户要求:
  - 一类是要求混合一副药剂, 依次含有  $A, B, C, D$  克的 alpha, beta, gamma, delta 元素
  - 第二类是要求配制出能在特定环境下爆炸的药剂, 环境参数为  $A, B, C, D$ , 如果一副药剂含有  $a, b, c, d$  克指定元素, 那么当  $A*a + B*b + C*c + D*d \geq 0$  时, 该药剂可以在此环境下引爆.当药剂师 Luo 在混合两副药剂的时候, he 可以从两副药剂中称出任意克然后进行混合.  
显然有一些要求药剂师 Luo 是不可能完成的, Luo 需要你来帮忙计算这个要求是否可以完成.

# 问题描述 (formula版)

- ▶ 给定元素矩阵 $M$ ,  $M$  为一个  $4 \times N$ 的矩阵
- ▶ 给定一个四维列向量  $x$ , 有两种要求:
  - ▶ 是否存在一个 $N$ 维的列向量  $w$ , 满足存在  $x = M \times w$
  - ▶ 是否存在一个 $N$ 维的列向量  $w$ , 满足存在  $x^T \times M \times w \geq 0$

# 得分情况

- ▶ 50分 杜瑜皓 张恒捷
- ▶ 40分 骆轩源
- ▶ 30分 卢啸尘 张瑞喆
- ▶ 20分 陈胤伯 vfk(吕凯风)
- ▶ 10分 秦岳 汪文潇 等7名同学

# 题目分析

- ▶ 看似是四维, 但是由于实际上是经典的液体混合模型, 通过除以总量可以将我们的问题降低为三维
- ▶ 对于一个点  $(a, b, c, d) \Rightarrow \frac{(a, b, c)}{a+b+c+d}$
- ▶ 对于一个面(面的一般式)  $(a, b, c, d) \Rightarrow (a - d, b - d, c - d, d)$

# 题目分析

- ▶ 问题变化为, 给定一个凸包, 判断
  - ▶ 一个点是否在凸包内部
  - ▶ 是否有凸包上的点在一个面之上

# 算法一

- ▶ 求出三维凸包
  - ▶ 对于第一类询问, 枚举凸包上的所有面, 判断给定点是否在内部
  - ▶ 对于第二类询问, 枚举凸包上的所有点, 判断给定面是否能满足该点
- ▶ 使用 $O(N^2)$ 复杂度的凸包算法
  
- ▶ 算法复杂度 $O(N^2 + NM)$
- ▶ 期望得分 50分

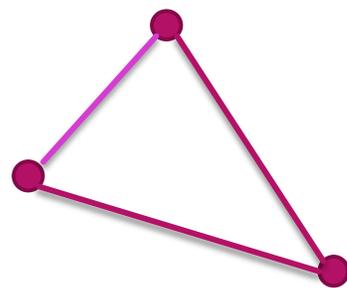
# 算法二

- ▶ 使用 $O(N \log(N))$ 的凸包算法
- ▶ 算法复杂度 $O(N \log(N) + NM)$
- ▶ 期望得分 70分

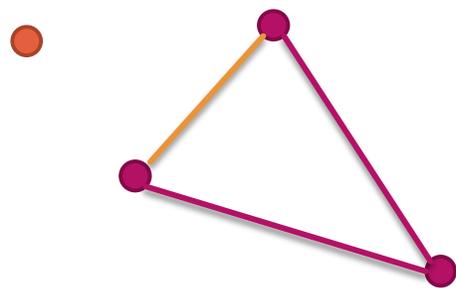
# 随机增量算法

- ▶ 初始化凸包
- ▶ 随机插入点 $p$ 
  - ▶ 删除所有可见面
  - ▶ 加入新面
  - ▶ 维护新面的可见点信息和所有点的可见面信息

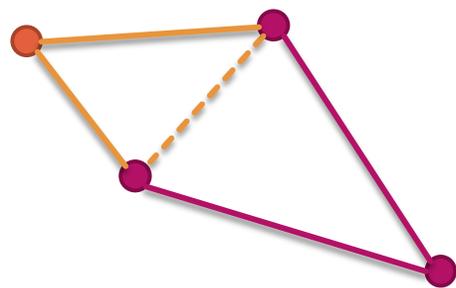
# 图示



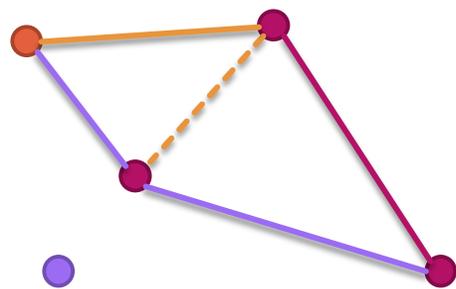
# 图示



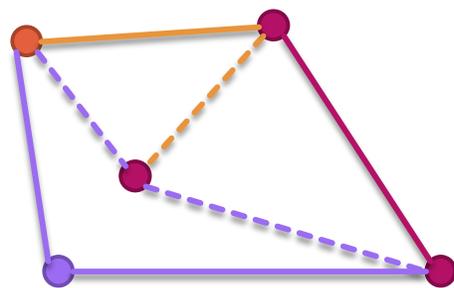
# 图示



# 图示



# 图示

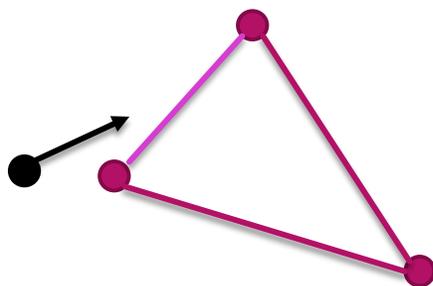


# 改进查找算法

- ▶ 给定点 $p$
- ▶ 当前凸包  $CH =$  原始凸包
- ▶ 判断 $p$ 是否在 $CH$ 里
- ▶ IF  $p$ 在 $CH$ 中, 说明也在最终凸包中, 过程结束
- ▶ else  $p$ 不在 $CH$ 中, 找到 $p$ 能看到的面 $f$
- ▶ IF  $f$ 在最终凸包中被删除, 说明 $p$ 不在最终凸包中, 过程结束
- ▶ else  $CH =$  删除 $f$ 时创建的凸包, goto 3

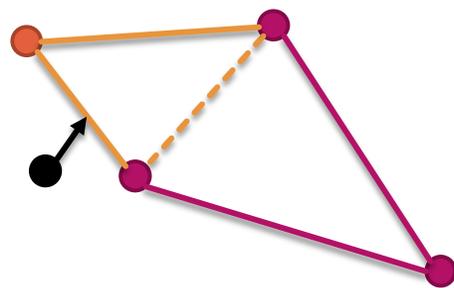
# 改进查找算法图示

- ▶ 不在原始凸包中, 找到可见面被删除时创建的凸包



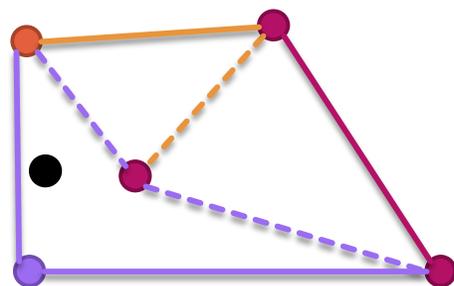
# 改进查找算法图示

- ▶ 不在原始凸包中, 找到可见面被删除时创建的凸包
- ▶ 不在给定凸包中, 继续以上过程



# 改进查找算法图示

- ▶ 不在原始凸包中, 找到可见面被删除时创建的凸包
- ▶ 不在给定凸包中, 继续以上过程
- ▶ 在给定凸包中, 结束



# 使用改进查找算法

- ▶ 复杂度等于随机增量树的深度, 期望为  $O(\log(N))$
- ▶ 对于只有第一类询问, 我们的总复杂度为  $O((N + M)\log(N))$
- ▶ 我们还剩下一个问题, 如何快速查找面...

# 对偶

- ▶ 给定一个凸包, 判断给定点是否在凸包内
- ▶ 对偶
- ▶ 给定一个半空间交, 判断一个半空间是否没有切到改半空间交
- ▶ 给定一个一般式的面  $ax + by + cz + d \geq 0$  对偶成点  $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right)$

# 最终算法

- ▶ 给定若干点 $X$ , 建立  $X$  的凸包  $CH_1$
- ▶ 将凸包上的每个面对偶成点, 求其凸包  $CH_2$
- ▶ 对于询问1, 若点 $x$ 在 $CH_1$ 中, 输出 $Y$ , 否则输出  $N$
- ▶ 对于询问2, 若面 $f$ 的对偶点在 $CH_2$ 中, 输出 $N$ , 否则输出  $Y$
  
- ▶ 期望复杂度  $O((N + M)\log(N))$
- ▶ 得分 100



# Any questions

欢迎提问

感谢