

## 2B – Pandemia

autor zadania: Mateusz Radecki

### Treść

Istnieje  $n$  miast położonych przy długiej drodze. Mamy dany ciąg binarny długości  $n$ . Informuje nas on, które miasta zarażone są wirusem, a które nie. Każdego dnia możemy zaszczepić jedno miasto wolne od wirusa, a każdej nocy każde miasto zarażone wirusem zaraża nim swoich niezaszczepionych sąsiadów. Wszystkie zarażenia dzieją się jednocześnie. Należy podać minimalną możliwą liczbę miast zarażonych wirusem przy optymalnej strategii szczepienia.

### Rozwiązanie

Przypadek, gdy wszystkie miasta są zdrowe, jest prostym przypadkiem, zatem pomińmy go.

Podzielmy ciąg na maksymalne przedziały zdrowych miast, otoczone z dwóch stron zarażonymi miastami. Owy ciąg oznaczmy przez  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Dodatkowo, obliczmy długości najdłuższego zdrowego prefiksu oraz sufiksu i oznaczmy je przez  $b_1$  oraz  $b_2$ .

Wprowadźmy pojęcie *frontu choroby*. Każdy przedział otoczony zarażonymi miastami posiada dwa fronty choroby i przy każdej turze bez szczepień liczba zarażonych miast w nim wzrasta o 2. Oba „ogony” (tzn. prefiks oraz sufiks) posiadają po jednym froncie choroby i liczba miast zarażonych w nich przy każdej turze bez szczepień wzrasta o 1.

Zastanówmy się, co dodatkowo może się dziać. Fronty choroby mogą same zniknąć, ponieważ całe przedziały mogą zostać zarażone. Działo to w pewien sposób na naszą korzyść – wirus przestaje zarażać więcej miast. Dodatkowo, każdym szczepieniem jesteśmy w stanie wyeliminować jeden front choroby – możemy zaszczepić któryś koniec zdrowego przedziału miast (w przypadku któregoś z ogonów należy zaszczepić koniec sąsiadujący z zarażonym miastem).

W związku z tym, powinniśmy najpierw eliminować fronty, które najpóźniej zniknęłyby same z siebie. Okazuje się, że możemy zatem posortować ciąg  $a_1, a_2, \dots, a_k$  niemalejąco i dla kolejnych przedziałów w nim szczepić je po kolei. Mówiąc dokładniej, najpierw szczepimy pierwszy koniec pierwszego przedziału, potem jego drugi koniec, potem pierwszy koniec drugiego przedziału i tak dalej. Można robić to jednocześnie symulując rozwój choroby i skracając przedziały.

Pozostaje pytanie co zrobić z ogonami, tzn. wartościami  $b_1$  i  $b_2$ . Załóżmy, że znamy jakąś strategię szczepienia, tzn. wiemy w jakiej kolejności chcemy zaszczyć które końce których przedziałów. Zmienimy kolejność tych szczepień i zastanówmy się co się stanie. Teoretycznie nadal eliminujemy jeden front choroby dziennie, ale teraz możemy nie zdążyć zaszczyć jakiegoś przedziału, przez co zniknie on sam. Zauważmy jednak, że jedynie poprawia to naszą sytuację! Fronty, na których zniknięcie nie musimy marnować szczepień działają na naszą korzyść. Wynika z tego, że znając sam zbiór końców przedziałów, które chcemy zaszczyć, możemy zaszczyć je w dowolnej kolejności. Możemy zatem rozważyć cztery przypadki: czy chcemy zaszczyć ogon  $b_1$  oraz czy chcemy zaszczyć ogon  $b_2$ . Dla każdego z tych dwóch szczepień, które zdecydujemy się wykonać, możemy wykonać je na samym początku, a następnie szczepić przedziały opisywane przez ciąg  $a_1, a_2, \dots, a_k$  od najdłuższych do najkrótszych, symulując cały czas rozwój choroby.

Oczywiście opisane powyżej rozwiązanie bazuje jedynie na intuicji, dlatego dokładny dowód wspomnianych faktów pozostawiamy jako ćwiczenie dla czytelnika. Jeśli zdecydujemy się na szybszy niż standardowy sposób sortowania, to ostateczna złożoność algorytmu będzie wynosić  $O(n)$ .