

4C – Ranking sklepów internetowych

autor zadania: Mateusz Radecki

Treść

Dana jest permutacja liczb od 1 do n . Przez medianę ciągu rozumiemy środkowy element ciągu po posortowaniu, lub jeśli ciąg ma parzystą liczbę elementów, średnią arytmetyczną dwóch środkowych elementów. Wartością ciągu określamy jego długość powiększoną o dwukrotność jego mediany. Należy wyznaczyć maksymalną wartość przedziału zadanej permutacji oraz policzyć ile przedziałów ma właśnie taką wartość.

Rozwiązanie

Pierwszą istotną obserwacją jest spostrzeżenie, że maksymalna wartość przedziału wynosi dokładnie $2n + 1$. Zawsze da się uzyskać co najmniej tyle, gdyż na przykład przedział zawierający jedynie liczbę n ma właśnie taką wartość. Czemu nie da się uzyskać więcej, przekonamy się nieco później.

Założmy, że przedział ma mieć długość d . W takim razie, by mieć wspomnianą, maksymalną wartość, mediana elementów w nim musi wynosić $\frac{2n+1-d}{2}$. Innymi słowy, dla przedziałów długości $1, 2, 3, 4, \dots$, mediana musi wynosić dokładnie $n, n - 1 + \frac{1}{2}, n - 1, n - 2 + \frac{1}{2}, \dots$

Zastanówmy się co dokładnie to oznacza. Jeśli przedział ma mieć nieparzystą długość postaci $2k - 1$, to musi on zawierać k największych elementów, a reszta elementów nie ma żadnego znaczenia. Łatwo też zauważyć, że w przypadku takich przedziałów mediana nie może być większa.

Jeśli zaś przedział ma mieć parzystą długość $2k$, to musi on zawierać $k + 1$ największych wartości, a pozostałe z nich nie mają znaczenia. Tutaj również nietrudno się przekonać, że mediana nie może być większa.

Dla każdej długości przedziału wiemy zatem ile największych wartości przedział ten musi zawierać, by osiągać maksymalną możliwą wartość. Możemy więc dla owego sufiksu wartości znaleźć skrajnie lewą i skrajnie prawą, ponieważ tylko one są interesujące. Pozwoli to nam, w czasie stałym, wyznaczyć liczbę przedziałów mieszczących się w całym ciągu, które dodatkowo zawierają wszystkie wymagane elementy.

Całkowita złożoność algorytmu wynosi zatem $\mathcal{O}(n)$.