

5C – Drzewo czerwono-czarne

autor zadania: Mateusz Radecki

Treść

Dane jest drzewo, którego wierzchołki pomalowane są na dwa kolory – czerwony i czarny. Dodatkowo, dla każdego wierzchołka wiemy, jakiego koloru ma on być finalnie. W jednym ruchu możemy wybrać dwa wierzchołki połączone krawędzią, i przemalować dowolny z nich na kolor drugiego. Należy stwierdzić, czy wykonując dowolny (być może pusty) ciąg ruchów, jesteśmy w stanie doprowadzić drzewo do docelowego stanu.

Rozwiązanie

Zacznijmy od rozpatrzenia najprostszych przypadków.

- Jeśli początkowy i finalny stan drzewa są identyczne, to odpowiedź oczywiście jest twierdząca – nie musimy nic robić.
- Jeśli początkowy stan zawiera tylko wierzchołki jednego koloru, to ponieważ finalny nie jest identyczny, to wymaga pojawienia się innego koloru, czego nie możemy zrobić – odpowiedź jest zatem przecząca.
- Jeśli w finalnym stanie każda para sąsiadujących wierzchołków jest różnych kolorów, to odpowiedź jest przecząca – nie jesteśmy w stanie wskazać pary wierzchołków, na której mogliśmy wykonać ostatni ruch, ponieważ taka para wierzchołków musi być tego samego koloru.
- Jeśli drzewo zawiera wierzchołek o stopniu co najmniej 3, to odpowiedź jest twierdząca.

Dowód ostatniego przypadku jest nieco skomplikowany. Powiedzmy, że wierzchołek o stopniu co najmniej 3 to t , a trójka jakichś jego sąsiadów to v , u i w . Niech pierwszą czynnością, którą wykonamy, będzie sprawienie, żeby nie wszystkie z wierzchołków v, u, w miały ten sam kolor. Jest to bardzo łatwo do osiągnięcia. Jeśli na początku wszystkie mają ten sam kolor, to „przyciągamy” drugi kolor z dowolnego innego wierzchołka do najbliższego mu z tych trzech wierzchołków.

Jeśli gdzieś w drzewie istnieje para wierzchołków (x, y) połączonych krawędzią taka, że oba te wierzchołki mają finalnie być tego samego koloru, oraz $x \neq t$ i $y \neq t$, to założmy bez straty ogólności, że wierzchołkiem bliższym do t jest wierzchołek x , a ścieżka z t do x przechodzi przez v . Oznaczmy tę ścieżkę przez $c_1, c_2, \dots, c_d$, gdzie $c_1 = t$, $c_2 = v$ i $c_d = x$. Oznaczmy początkowy kolor wierzchołka i przez s_i , a docelowy kolor wierzchołka i przez k_i . Zamiast uzyskać zadany układ, uzyskamy układ w którym wierzchołek c_i malujemy na kolor $k_{c_{i-1}}$ dla każdego i z przedziału $[2, d]$. Sprawia to, że wśród wierzchołków $\{t, v, u, w\}$ będą istnieć dwa wierzchołki połączone krawędzią, które powinny finalnie mieć ten sam kolor. Zauważmy, że jeśli nie jesteśmy w stanie znaleźć takiej pary wierzchołków (x, y) , to znaczy, że już na początku wśród wierzchołków $\{t, v, u, w\}$ istnieją dwa połączone krawędzią wierzchołki wymagające tego samego koloru i możemy ominąć cały ten etap. Jak na koniec, z osiągniętego układu, uzyskać docelowy układ? Wystarczy kolejno, dla każdego i od 2 do $d-1$, przemalować wierzchołek c_i na kolor wierzchołka c_{i+1} , a na koniec przemalować x na kolor wierzchołka y . Łatwo zauważyć, że da nam to docelowe rozwiązanie. Możemy zatem od tego momentu zakładać, że finalnie wierzchołek t oraz wierzchołek v mają mieć ten sam kolor.

Możemy rozwiązać aktualne zadanie malując odpowiednim kolorem kolejne liście drzewa i zapominając o nich, aż zostaną w nim jedynie wierzchołki t, v, u i w . Zauważmy, że łatwo jest „przeciągnąć” kolor z wierzchołków t, v, u i w do dowolnego innego wierzchołka nie tracąc faktu, że wśród tych wierzchołków znajdują się oba kolory.

Na koniec musimy doprowadzić do sytuacji, w której każdy z wierzchołków t, v, u i w ma odpowiedni kolor, przy czym wiemy, że wierzchołki t oraz v muszą mieć ten sam kolor. Tutaj również łatwo jest się przekonać, że zawsze da się to zrobić, zostawiamy to więc jako ćwiczenie dla czytelnika.

Powyższe kończy przypadek, gdy w drzewie istnieje wierzchołek o stopniu co najmniej 3. Co jeśli tak nie jest? Oznacza to, że drzewo jest ścieżką. Patrząc na ścieżkę jesteśmy w stanie podzielić ją na spójne przedziały koloru czerwonego oraz czarnego. Taki ciąg kolorów ma jakąś długość oraz kolor od którego się zaczyna. Oczywiście oba kolory w takim ciągu występują na zmianę. Możemy policzyć taki ciąg zarówno dla układu początkowego, jak i końcowego. Korzystając z faktu, że w układzie końcowym istnieją co najmniej dwa sąsiednie wierzchołki tego samego koloru, możemy poczynić ważną obserwację: jeżeli oba ciągi kolorów są równe, to da się przekształcić jeden układ w drugi! Wykazanie tego faktu również nie jest trudne i zostawiamy je jako ćwiczenie.

Co jednak, gdy ciągi nie są równe? Zastanówmy się, jak może się zmieniać ciąg kolorów odpowiadający początkowemu układowi. Przedziały tych samych kolorów mogą się łączyć oraz skrajne przedziały mogą znikać. Oznacza to, że możliwymi ruchami są: usunięcie pierwszego elementu ciągu; usunięcie ostatniego elementu ciągu; usunięcie dwóch sąsiednich elementów ciągu. Dość łatwo jest zatem ustalić warunki na to, że ciąg początkowy da się przekształcić w końcowy. Jeśli ciągi zaczynają się od tego samego koloru, to ciąg startowy musi być co najmniej tak długi, jak końcowy. Jeśli zaś zaczynają się od różnych kolorów, to ciąg początkowy musi być ściśle dłuższy niż końcowy. Możemy zatem wyznaczyć początkowy oraz końcowy ciąg dla drzewa i sprawdzić, czy spełniają one odpowiednie nierówności.

Całe zadanie opiera się zatem na sprawdzeniu kilku prostych warunków, co oczywiście możemy zrobić w czasie $\mathcal{O}(n)$.