

反回文串 – 解题报告

skywalkert

2018 年 5 月 14 日

题目大意

- T 组询问，要求统计有多少长度为 n 、字符集大小为 k 的字符串存在至少一种循环表示是回文串，答案对 p 取模。
- 测试点 1 - 10: $1 \leq n \leq 10^{10}$
- 测试点 11 - 20: $1 \leq n \leq 10^{14}$
- 测试点 21 - 33: $1 \leq n \leq 10^{18}$
- 所有测试点: $1 \leq T \leq 10, 1 \leq k \leq n, 10^9 \leq p \leq 2^{30}$

F - Rotated Palindromes

Time limit : 2sec / Memory limit : 256MB

Score : 1000 points

Problem Statement

Takahashi and Aoki are going to together construct a sequence of integers.

First, Takahashi will provide a sequence of integers a , satisfying all of the following conditions:

- The length of a is N .
- Each element in a is an integer between 1 and K , inclusive.
- a is a *palindrome*, that is, reversing the order of elements in a will result in the same sequence as the original.

Then, Aoki will perform the following operation an arbitrary number of times:

- Move the first element in a to the end of a .

How many sequences a can be obtained after this procedure, modulo $10^9 + 7$?

Constraints

- $1 \leq N \leq 10^9$
- $1 \leq K \leq 10^9$

得分情况

此处应该有图

大家好我是图

- 对于任意串 S ，定义 $G(S)$ 是包含 S 所有循环表示的集合。

题目分析

- 对于任意串 S ，定义 $G(S)$ 是包含 S 所有循环表示的集合。
- 对于任意回文串 T ， $G(T)$ 中每个串需要恰好产生一次贡献。

题目分析

- 对于任意串 S ，定义 $G(S)$ 是包含 S 所有循环表示的集合。
- 对于任意回文串 T ， $G(T)$ 中每个串需要恰好产生一次贡献。
- 是否存在两个不同的回文串 S 和 T 满足 $G(S) \cap G(T) \neq \emptyset$?

题目分析

- 对于任意串 S ，定义 $G(S)$ 是包含 S 所有循环表示的集合。
- 对于任意回文串 T ， $G(T)$ 中每个串需要恰好产生一次贡献。
- 是否存在两个不同的回文串 S 和 T 满足 $G(S) \cap G(T) \neq \emptyset$?
- $G(S)$ 的大小什么时候不是 $|S|$?

$G(S)$ 的大小什么时候不是 $|S|$?

$G(S)$ 的大小什么时候不是 $|S|$?

- $G(\text{aaa}) = \{\text{aaa}\}$, $G(\text{abaaba}) = \{\text{abaaba}, \text{baabaa}, \text{aabaab}\}$

$G(S)$ 的大小什么时候不是 $|S|$?

- $G(\text{aaa}) = \{\text{aaa}\}$, $G(\text{abaaba}) = \{\text{abaaba}, \text{baabaa}, \text{aabaab}\}$
- $G(S)$ 的大小为 S 的最小周期长度

$G(S)$ 的大小什么时候不是 $|S|$?

- $G(\text{aaa}) = \{\text{aaa}\}$, $G(\text{abaaba}) = \{\text{abaaba}, \text{baabaa}, \text{aabaab}\}$
- $G(S)$ 的大小为 S 的最小周期长度
- $\text{period}(\text{aaa}) = \text{a}$, $\text{period}(\text{abaaba}) = \text{aba}$

题目分析 – 疑问 1

是否存在两个不同的回文串 S 和 T 满足 $G(S) \cap G(T) \neq \emptyset$?

题目分析 – 疑问 1

是否存在两个不同的回文串 S 和 T 满足 $G(S) \cap G(T) \neq \emptyset$?

- S 和 T 互为循环表示, $G(S) = G(T)$

题目分析 – 疑问 1

是否存在两个不同的回文串 S 和 T 满足 $G(S) \cap G(T) \neq \emptyset$?

- S 和 T 互为循环表示, $G(S) = G(T)$
- 若循环左移 p 位和循环左移 q 位都是回文串, $p \not\equiv q \pmod{|\text{period}(S)|}$, 那么可以得到一系列等价关系

题目分析 – 疑问 1

是否存在两个不同的回文串 S 和 T 满足 $G(S) \cap G(T) \neq \emptyset$?

- S 和 T 互为循环表示, $G(S) = G(T)$
- 若循环左移 p 位和循环左移 q 位都是回文串, $p \not\equiv q \pmod{|\text{period}(S)|}$, 那么可以得到一系列等价关系
- 若 $\text{period}(S)$ 为奇数, 则会推出更小的周期, 矛盾

题目分析 – 疑问 1

是否存在两个不同的回文串 S 和 T 满足 $G(S) \cap G(T) \neq \emptyset$?

- S 和 T 互为循环表示, $G(S) = G(T)$
- 若循环左移 p 位和循环左移 q 位都是回文串, $p \not\equiv q \pmod{|\text{period}(S)|}$, 那么可以得到一系列等价关系
- 若 $\text{period}(S)$ 为奇数, 则会推出更小的周期, 矛盾
- 若 $\text{period}(S)$ 为偶数, 则必有 $p \equiv q \pmod{|\text{period}(S)|/2}$, 且一定存在这样的 p 和 q

- 定义 $f(m)$ 表示长度为 n 、字符集大小为 k 、最小周期长度为 m 的回文串数量，那么有 $\sum_{d|m} f(d) = k^{\lceil m/2 \rceil}$

- 定义 $f(m)$ 表示长度为 n 、字符集大小为 k 、最小周期长度为 m 的回文串数量，那么有 $\sum_{d|m} f(d) = k^{\lceil m/2 \rceil}$
- 答案是 $\sum_{2d|n} d f(2d) + \sum_{(2d+1)|n} (2d+1) f(2d+1)$

任务 1

测试点 1 - 10: $1 \leq n \leq 10^{10}, 1 \leq T \leq 10$

- n 的约数个数 $\tau(n)$ 满足 $\tau(n) \leq 2304$

任务 1

测试点 1 - 10: $1 \leq n \leq 10^{10}, 1 \leq T \leq 10$

- n 的约数个数 $\tau(n)$ 满足 $\tau(n) \leq 2304$
- 对 n 的每个约数 m , 求解 $f(m) = k^{\lceil m/2 \rceil} - \sum_{d|m, d < m} f(d)$

任务 1

测试点 1 - 10: $1 \leq n \leq 10^{10}, 1 \leq T \leq 10$

- n 的约数个数 $\tau(n)$ 满足 $\tau(n) \leq 2304$
- 对 n 的每个约数 m , 求解 $f(m) = k^{\lceil m/2 \rceil} - \sum_{d|m, d < m} f(d)$
- 时间复杂度可以是 $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{10^{10}}}{\ln 10^{10}} + \tau^2(n)\right)$, 也可以是 $\mathcal{O}(\tau(n)\sqrt{n} \log \tau(n))$

任务 1

测试点 1 - 10: $1 \leq n \leq 10^{10}, 1 \leq T \leq 10$

- n 的约数个数 $\tau(n)$ 满足 $\tau(n) \leq 2304$
- 对 n 的每个约数 m , 求解 $f(m) = k^{\lceil m/2 \rceil} - \sum_{d|m, d < m} f(d)$
- 时间复杂度可以是 $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{10^{10}}}{\ln 10^{10}} + \tau^2(n)\right)$, 也可以是 $\mathcal{O}(\tau(n)\sqrt{n} \log \tau(n))$
- 期望得分: 前者 36, 后者 30

隐藏奖励: 测试点 30 - 31 满足 $1 \leq n \leq 10^{18}$ 且 n 是质数

任务 2

测试点 11 - 20: $1 \leq n \leq 10^{14}, 1 \leq T \leq 10$

■ n 的约数个数 $\tau(n)$ 满足 $\tau(n) \leq 17280$

n 的不同质因数个数 $\omega(n)$ 满足 $\omega(n) \leq 12$

任务 2

测试点 11 - 20: $1 \leq n \leq 10^{14}, 1 \leq T \leq 10$

■ n 的约数个数 $\tau(n)$ 满足 $\tau(n) \leq 17280$

n 的不同质因数个数 $\omega(n)$ 满足 $\omega(n) \leq 12$

■ 考虑容斥, $\sum_{d|m} f(d) = g(m) \Leftrightarrow \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) g(d) = f(m)$

任务 2

测试点 11 - 20: $1 \leq n \leq 10^{14}, 1 \leq T \leq 10$

■ n 的约数个数 $\tau(n)$ 满足 $\tau(n) \leq 17280$

n 的不同质因数个数 $\omega(n)$ 满足 $\omega(n) \leq 12$

■ 考虑容斥, $\sum_{d|m} f(d) = g(m) \Leftrightarrow \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) g(d) = f(m)$

■ 对 n 的每个约数 m , 设它的质因子集合为 $P(m)$, 以及 $g(m) = k^{\lceil m/2 \rceil}$, 则 $f(m) = \sum_{Q \subseteq P(m)} (-1)^{|Q|} g\left(\frac{m}{\prod_{p \in Q} p}\right)$

任务 2

测试点 11 - 20: $1 \leq n \leq 10^{14}, 1 \leq T \leq 10$

■ n 的约数个数 $\tau(n)$ 满足 $\tau(n) \leq 17280$

n 的不同质因数个数 $\omega(n)$ 满足 $\omega(n) \leq 12$

■ 考虑容斥, $\sum_{d|m} f(d) = g(m) \Leftrightarrow \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) g(d) = f(m)$

■ 对 n 的每个约数 m , 设它的质因子集合为 $P(m)$, 以及

$g(m) = k^{\lceil m/2 \rceil}$, 则 $f(m) = \sum_{Q \subseteq P(m)} (-1)^{|Q|} g\left(\frac{m}{\prod_{p \in Q} p}\right)$

■ 时间复杂度 $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{10^{14}}}{\ln 10^{14}} + \sum_{m|n} 2^{\omega(m)}\right)$, 其中 $\sum_{m|n} 2^{\omega(m)} \leq 2132325$

任务 2

测试点 11 - 20: $1 \leq n \leq 10^{14}, 1 \leq T \leq 10$

■ n 的约数个数 $\tau(n)$ 满足 $\tau(n) \leq 17280$

n 的不同质因数个数 $\omega(n)$ 满足 $\omega(n) \leq 12$

■ 考虑容斥, $\sum_{d|m} f(d) = g(m) \Leftrightarrow \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) g(d) = f(m)$

■ 对 n 的每个约数 m , 设它的质因子集合为 $P(m)$, 以及

$g(m) = k^{\lceil m/2 \rceil}$, 则 $f(m) = \sum_{Q \subseteq P(m)} (-1)^{|Q|} g\left(\frac{m}{\prod_{p \in Q} p}\right)$

■ 时间复杂度 $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{10^{14}}}{\ln 10^{14}} + \sum_{m|n} 2^{\omega(m)}\right)$, 其中 $\sum_{m|n} 2^{\omega(m)} \leq 2132325$

■ 期望得分: 54 - 60

任务 3

测试点 21 - 33: $1 \leq n \leq 10^{18}, 1 \leq T \leq 10$

■ n 的约数个数 $\tau(n)$ 满足 $\tau(n) \leq 103680$

n 的不同质因数个数 $\omega(n)$ 满足 $\omega(n) \leq 15$

任务 3

测试点 21 - 33: $1 \leq n \leq 10^{18}, 1 \leq T \leq 10$

■ n 的约数个数 $\tau(n)$ 满足 $\tau(n) \leq 103680$

n 的不同质因数个数 $\omega(n)$ 满足 $\omega(n) \leq 15$

■ 考虑 $g(m)$ 的贡献, 令 $h(2d) = d, h(2d+1) = 2d+1$, 则

$$\sum_{m|n} h(m)f(m) = \sum_{m|n} h(m) \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) g(d) =$$

$$\sum_{d|n} g(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') h(dd')$$

任务 3 Cont'd

测试点 21 - 33: $1 \leq n \leq 10^{18}, 1 \leq T \leq 10$

- 若 d 是奇数, 且 $\frac{n}{d}$ 是偶数, 则 $\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d')h(dd') = 0$

测试点 21 - 33: $1 \leq n \leq 10^{18}, 1 \leq T \leq 10$

- 若 d 是奇数, 且 $\frac{n}{d}$ 是偶数, 则 $\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d')h(dd') = 0$
- 对于其他情况, $h(dd') = h(d)d'$, 则

$$\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d')h(dd') = h(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d')d' = h(d) \sum_{p \in P(\frac{n}{d})} (1 - p)$$

测试点 21 - 33: $1 \leq n \leq 10^{18}, 1 \leq T \leq 10$

■ 若 d 是奇数, 且 $\frac{n}{d}$ 是偶数, 则 $\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d')h(dd') = 0$

■ 对于其他情况, $h(dd') = h(d)d'$, 则

$$\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d')h(dd') = h(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d')d' = h(d) \sum_{p \in P(\frac{n}{d})} (1 - p)$$

■ 时间复杂度 $\mathcal{O}(n^{1/4} \log n + \tau(n) \log n)$

任务 3 Cont'd

测试点 21 - 33: $1 \leq n \leq 10^{18}, 1 \leq T \leq 10$

■ 若 d 是奇数, 且 $\frac{n}{d}$ 是偶数, 则 $\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d')h(dd') = 0$

■ 对于其他情况, $h(dd') = h(d)d'$, 则

$$\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d')h(dd') = h(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d')d' = h(d) \sum_{p \in P(\frac{n}{d})} (1 - p)$$

■ 时间复杂度 $\mathcal{O}(n^{1/4} \log n + \tau(n) \log n)$

■ 期望得分: 100

隐藏奖励: 不优美的质因数分解可以得到 93 分