旧试题 – 解题报告

skywalkert

2018 年 5 月 14 日

题目大意

- T 组询问，要求计算 $\sum_{i=1}^{A}\sum_{j=1}^{B}\sum_{k=1}^{C} d(ijk) \bmod (10^9+7)$，其中 $d(ijk)$ 表示 ijk 的约数个数。
- 测试点 1 - 3：$1 \le A, B, C \le 5000$
- 测试点 4 - 10：$1 \le A, B, C \le 10^5$
- 所有测试点：$1 \le T \le 10, 1 \le \sum \max(A, B, C) \le 2 \cdot 10^5$
- Shortest judge solution: 2531 bytes

5276: Skyfall

Time Limit: 10 Sec Memory Limit: 233 MB
Submit: 70 Solved: 20
[Submit][Status][Discuss]

Description

求下列表达式的值

$$\sum_{i=1}^{A}\sum_{j=1}^{B}\sum_{k=1}^{C} d(i \times j \times k)$$

其中d(x)代表x的因子数，例如d(6)=4

Input

一行三个整数A,B，C。
1 ≤ A, B, C ≤ 5000

Output

输出一行一个整数表示答案对2^30取模的结果。

得分情况

此处应该有图

大家好我是图

题目分析

- 令 $[x]$ 在 x 成立时为 1，在 x 不成立时为 0
  令 $P(m)$ 为 m 的质因子集合
  令 $e(m,p)$ 表示最大的非负整数 k 使得 $p^k|m$

题目分析

- 令 $[x]$ 在 x 成立时为 1，在 x 不成立时为 0
  令 $P(m)$ 为 m 的质因子集合
  令 $e(m,p)$ 表示最大的非负整数 k 使得 $p^k|m$
- $d(ijk) = \sum_{x|ijk} 1 = \prod_{p\in P(i)\cup P(j)\cup P(k)} e(i,p)+e(j,p)+e(k,p)+1$

题目分析

- 令 $[x]$ 在 x 成立时为 1，在 x 不成立时为 0
  令 $P(m)$ 为 m 的质因子集合
  令 $e(m,p)$ 表示最大的非负整数 k 使得 $p^k|m$
- $d(ijk) = \sum_{x|ijk} 1 = \prod_{p \in P(i) \cup P(j) \cup P(k)} e(i,p) + e(j,p) + e(k,p) + 1$
- 对于 $i = p^a, j = p^b, k = p^c$ (p 是质数)，有

$$
\begin{aligned}
d(ijk) &= \sum_{x=1}^{a} 1 + \sum_{y=1}^{b} 1 + \sum_{z=1}^{c} 1 + 1 \\
&= \sum_{x=0}^{a} \sum_{y=0}^{b} \sum_{z=0}^{c} [\text{the second largest element in } \{x, y, z\} \text{ equals to } 0 \\
&= \sum_{x=0}^{a} \sum_{y=0}^{b} \sum_{z=0}^{c} [\min(x,y) = 0][\min(x,z) = 0][\min(y,z) = 0]
\end{aligned}
$$

题目分析

- 令 $[x]$ 在 x 成立时为 1，在 x 不成立时为 0
  令 $P(m)$ 为 m 的质因子集合
  令 $e(m,p)$ 表示最大的非负整数 k 使得 $p^k|m$
- $d(ijk) = \sum_{x|ijk} 1 = \prod_{p \in P(i)\cup P(j)\cup P(k)} e(i,p) + e(j,p) + e(k,p) + 1$
- 对于 $i = p^a, j = p^b, k = p^c$ (p 是质数)，有

$$d(ijk) = \sum_{x=1}^{a} 1 + \sum_{y=1}^{b} 1 + \sum_{z=1}^{c} 1 + 1$$

$$= \sum_{x=0}^{a}\sum_{y=0}^{b}\sum_{z=0}^{c} [\text{the second largest element in } \{x,y,z\} \text{ equals to } 0]$$

$$= \sum_{x=0}^{a}\sum_{y=0}^{b}\sum_{z=0}^{c} [\min(x,y)=0][\min(x,z)=0][\min(y,z)=0]$$

- $d(ijk) = \sum_{x|i}\sum_{y|j}\sum_{z|k} [\gcd(x,y)=1][\gcd(x,z)=1][\gcd(y,z)=1]$

任务 1

测试点 1 - 3：$1 \le A, B, C \le 5000, 1 \le T \le 10$

任务 1

测试点 1 - 3： $1 \le A, B, C \le 5000, 1 \le T \le 10$

$$\sum_{i=1}^{A}\sum_{j=1}^{B}\sum_{k=1}^{C} d(ijk)$$

$$=\sum_{i=1}^{A}\sum_{j=1}^{B}\sum_{k=1}^{C}\sum_{x|i}\sum_{y|j}\sum_{z|k}[\gcd(x,y)=1][\gcd(x,z)=1][\gcd(y,z)=1]$$

$$=\sum_{x=1}^{A}\sum_{y=1}^{B}\sum_{z=1}^{C}[\gcd(x,y)=1][\gcd(x,z)=1][\gcd(y,z)=1]\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor\left\lfloor\frac{B}{y}\right\rfloor\left\lfloor\frac{C}{z}\right\rfloor$$

$$=\sum_{x=1}^{A}\sum_{y=1}^{B}\sum_{z=1}^{C}[\gcd(x,y)=1][\gcd(x,z)=1]\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor\left\lfloor\frac{B}{y}\right\rfloor\left\lfloor\frac{C}{z}\right\rfloor\sum_{d|y,d|z}\mu(d)$$

$$=\sum_{x=1}^{A}\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor\sum_{d}\mu(d)\sum_{id\le B}[\gcd(x,id)=1]\left\lfloor\frac{B}{id}\right\rfloor\sum_{jd\le C}[\gcd(x,jd)=1]\left\lfloor\frac{C}{jd}\right\rfloor$$

任务 1 Cont'd

测试点 1 - 3：$1 \le A, B, C \le 5000, 1 \le T \le 10$

- $f_x(n) = [\gcd(x, n) = 1]$ 是关于 n 的完全积性函数，可线性筛求出

任务 1 Cont'd

测试点 1 - 3：$1 \le A, B, C \le 5000, 1 \le T \le 10$

- $f_x(n) = [\gcd(x, n) = 1]$ 是关于 n 的完全积性函数，可线性筛求出
- 令 $c(x, m) = \sum_{i=1}^{m} [\gcd(x, i) = 1] \left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor$，则 $c(x, m) - c(x, m-1) = \sum_{i|m} [\gcd(x, i) = 1]$，可通过 $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ 次加、减、与运算预处理得到

任务 1 Cont'd

测试点 1 - 3：$1 \leq A, B, C \leq 5000, 1 \leq T \leq 10$

- $f_x(n) = [\gcd(x, n) = 1]$ 是关于 n 的完全积性函数，可线性筛求出
- 令 $c(x, m) = \sum\limits_{i=1}^{m} [\gcd(x, i) = 1] \left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor$，则 $c(x, m) - c(x, m-1) = \sum\limits_{i \mid m} [\gcd(x, i) = 1]$，可通过 $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ 次加、减、与运算预处理得到
- 答案等于 $\sum\limits_{x=1}^{A} \left\lfloor \frac{A}{x} \right\rfloor \sum\limits_{d=1}^{\max(B,C)} [\gcd(x, d) = 1] \mu(d) c(x, \left\lfloor \frac{B}{d} \right\rfloor) c(x, \left\lfloor \frac{C}{d} \right\rfloor)$，可通过 $\mathcal{O}(n^2)$ 次加、减、与运算，$\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ 次乘、除运算得到

任务 1 Cont'd

测试点 1 - 3：$1 \le A, B, C \le 5000, 1 \le T \le 10$

- $f_x(n) = [\gcd(x, n) = 1]$ 是关于 n 的完全积性函数，可线性筛求出
- 令 $c(x, m) = \sum_{i=1}^{m} [\gcd(x, i) = 1] \left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor$，则 $c(x, m) - c(x, m-1) = \sum_{i \mid m} [\gcd(x, i) = 1]$，可通过 $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ 次加、减、与运算预处理得到
- 答案等于 $\sum_{x=1}^{A} \left\lfloor \frac{A}{x} \right\rfloor \sum_{d=1}^{\max(B,C)} [\gcd(x, d) = 1] \mu(d) c(x, \left\lfloor \frac{B}{d} \right\rfloor) c(x, \left\lfloor \frac{C}{d} \right\rfloor)$，可通过 $\mathcal{O}(n^2)$ 次加、减、与运算，$\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ 次乘、除运算得到
- 时间复杂度：$\mathcal{O}(n^2 \log n + Tn^2)$

任务 1 Cont'd

测试点 1 - 3：$1 \le A, B, C \le 5000, 1 \le T \le 10$

- $f_x(n) = [\gcd(x, n) = 1]$ 是关于 n 的完全积性函数，可线性筛求出
- 令 $c(x, m) = \sum\limits_{i=1}^{m} [\gcd(x, i) = 1] \left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor$，则 $c(x, m) - c(x, m-1) = \sum\limits_{i \mid m} [\gcd(x, i) = 1]$，可通过 $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ 次加、减、与运算预处理得到
- 答案等于 $\sum\limits_{x=1}^{A} \left\lfloor \frac{A}{x} \right\rfloor \sum\limits_{d=1}^{\max(B,C)} [\gcd(x, d) = 1] \mu(d) c(x, \left\lfloor \frac{B}{d} \right\rfloor) c(x, \left\lfloor \frac{C}{d} \right\rfloor)$，可通过 $\mathcal{O}(n^2)$ 次加、减、与运算，$\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ 次乘、除运算得到
- 时间复杂度：$\mathcal{O}(n^2 \log n + Tn^2)$
- 期望得分：30

任务 2

测试点 4 - 10： $1 \le A, B, C \le 10^5, 1 \le \sum \max(A, B, C) \le 2 \cdot 10^5$

任务 2

测试点 4 - 10：$1 \le A, B, C \le 10^5, 1 \le \sum \max(A, B, C) \le 2 \cdot 10^5$

$$\sum_{i=1}^{A}\sum_{j=1}^{B}\sum_{k=1}^{C} d(ijk)$$

$$=\sum_{i=1}^{A}\sum_{j=1}^{B}\sum_{k=1}^{C}\sum_{x|i}\sum_{y|j}\sum_{z|k}[\gcd(x,y)=1][\gcd(x,z)=1][\gcd(y,z)=1]$$

$$=\sum_{x=1}^{A}\sum_{y=1}^{B}\sum_{z=1}^{C}[\gcd(x,y)=1][\gcd(x,z)=1][\gcd(y,z)=1]\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor\left\lfloor\frac{B}{y}\right\rfloor\left\lfloor\frac{C}{z}\right\rfloor$$

$$=\sum_{x=1}^{A}\sum_{y=1}^{B}\sum_{z=1}^{C}\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor\left\lfloor\frac{B}{y}\right\rfloor\left\lfloor\frac{C}{z}\right\rfloor\sum_{u|x,u|y}\sum_{v|x,v|z}\sum_{w|y,w|z}\mu(u)\mu(v)\mu(w)$$

$$=\sum_{u=1}^{\min(A,B)}\sum_{v=1}^{\min(A,C)}\sum_{w=1}^{\min(B,C)}\mu(u)\mu(v)\mu(w)\sum_{u|x,v|x}\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor\sum_{u|y,w|y}\left\lfloor\frac{B}{y}\right\rfloor\sum_{v|z,w|z}\left\lfloor\frac{C}{z}\right\rfloor$$

任务 2 Cont'd

测试点 4 - 10：$1 \le A, B, C \le 10^5, 1 \le \sum \max(A, B, C) \le 2 \cdot 10^5$

- 令 $f_x(n) = \sum\limits_{n|d} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$，答案等于
  $\sum\limits_{u}\sum\limits_{v}\sum\limits_{w} \mu(u)\mu(v)\mu(w) f_A(\mathrm{lcm}(u,v)) f_B(\mathrm{lcm}(u,w)) f_C(\mathrm{lcm}(v,w))$

任务 2 Cont'd

测试点 4 - 10：$1 \le A, B, C \le 10^5, 1 \le \sum \max(A, B, C) \le 2 \cdot 10^5$

- 令 $f_x(n) = \sum\limits_{n|d} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$，答案等于
  $\sum\limits_u \sum\limits_v \sum\limits_w \mu(u)\mu(v)\mu(w) f_A(\mathrm{lcm}(u, v)) f_B(\mathrm{lcm}(u, w)) f_C(\mathrm{lcm}(v, w))$
- 注意到 $f_x(n) > 0$ 时 $n \le x$，对于 $1 \le x \le \max(A, B, C)$, $\mu(x) \ne 0$ 的点 x 构建无向图，若点 u 和点 v 满足 $\mathrm{lcm}(u, v) \le \max(A, B, C)$ 则在它们之间连一条边，这样的图中点数不超过 60794，边数不超过 760741，三个点组成的环个数不超过 14561211

任务 2 Cont'd

测试点 4 - 10：$1 \le A, B, C \le 10^5, 1 \le \sum \max(A, B, C) \le 2 \cdot 10^5$

- 令 $f_x(n) = \sum\limits_{n|d} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$，答案等于 $\sum\limits_u \sum\limits_v \sum\limits_w \mu(u)\mu(v)\mu(w) f_A(\operatorname{lcm}(u, v)) f_B(\operatorname{lcm}(u, w)) f_C(\operatorname{lcm}(v, w))$
- 注意到 $f_x(n) > 0$ 时 $n \le x$，对于 $1 \le x \le \max(A, B, C)$，$\mu(x) \ne 0$ 的点 x 构建无向图，若点 u 和点 v 满足 $\operatorname{lcm}(u, v) \le \max(A, B, C)$ 则在它们之间连一条边，这样的图中点数不超过 60794，边数不超过 760741，三个点组成的环个数不超过 14561211
- 由于三元环的贡献涉及大量乘、除运算，不优秀的三元环枚举也可通过

任务 2 Cont'd

测试点 4 - 10：$1 \le A, B, C \le 10^5, 1 \le \sum \max(A, B, C) \le 2 \cdot 10^5$

- 令 $f_x(n) = \sum\limits_{n|d} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$，答案等于
  $\sum\limits_{u}\sum\limits_{v}\sum\limits_{w} \mu(u)\mu(v)\mu(w) f_A(\operatorname{lcm}(u, v)) f_B(\operatorname{lcm}(u, w)) f_C(\operatorname{lcm}(v, w))$
- 注意到 $f_x(n) > 0$ 时 $n \le x$，对于 $1 \le x \le \max(A, B, C)$，$\mu(x) \ne 0$ 的点 x 构建无向图，若点 u 和点 v 满足 $\operatorname{lcm}(u, v) \le \max(A, B, C)$ 则在它们之间连一条边，这样的图中点数不超过 60794，边数不超过 760741，三个点组成的环个数不超过 14561211
- 由于三元环的贡献涉及大量乘、除运算，不优秀的三元环枚举也可通过
- 时间复杂度：$\mathcal{O}\left(\sum \left(\max(A, B, C) \log^2 \max(A, B, C)\right)^{1.5}\right)$

任务 2 Cont'd

测试点 4 - 10：$1 \le A, B, C \le 10^5, 1 \le \sum \max(A, B, C) \le 2 \cdot 10^5$

- 令 $f_x(n) = \sum_{n|d} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$，答案等于
  $\sum_u \sum_v \sum_w \mu(u)\mu(v)\mu(w) f_A(\operatorname{lcm}(u, v)) f_B(\operatorname{lcm}(u, w)) f_C(\operatorname{lcm}(v, w))$
- 注意到 $f_x(n) > 0$ 时 $n \le x$，对于 $1 \le x \le \max(A, B, C)$, $\mu(x) \ne 0$ 的点 x 构建无向图，若点 u 和点 v 满足 $\operatorname{lcm}(u, v) \le \max(A, B, C)$ 则在它们之间连一条边，这样的图中点数不超过 60794，边数不超过 760741，三个点组成的环个数不超过 14561211
- 由于三元环的贡献涉及大量乘、除运算，不优秀的三元环枚举也可通过
- 时间复杂度：$\mathcal{O}\left(\sum (\max(A, B, C) \log^2 \max(A, B, C))^{1.5}\right)$
- 期望得分：100