挑战 NPC

清华大学 交叉信息研究院 吕凯风

January 31, 2016

论题目的命名

这次 WC 你需要翻过三座大山：

- 挑战 NPC
- 论战捆竹竿
- 鏖战表达式

（鏖，音：áo，我叫红领巾）

第一个小时

一开考就有人火速开始挑战 NPC。

第一个小时大部分人都在挑战 NPC。

第二个小时

一半挑战 NPC，一半论战捆竹竿，小部分鏖战表达式。

第三个小时

大部分论战捆竹竿，小部分鏖战表达式和挑战 NPC。

第四个小时

大部分鏖战表达式，小部分论战捆竹竿和挑战 NPC。

第五个小时

做每道题的人都很多。

到了快结束的时候：沉思，发呆，检查，俄罗斯方块。

上厕所的人络绎不绝。

题目大意

有 n 个球，m 个筐子，每个筐子至多放 3 个球，每个球必须放到一个筐子内。

有个 e 个条件，编号为 v_i 的球可以放进编号为 u_i 的筐子中。

定义筐子为半空的当且仅当筐子内有不超过 1 个球。

求半空的筐子至多有多少个。

$n \leq 3m$，$m \leq 100$

为什么我觉得这题不可做

难道真如题面所说，这题是 NPC 的？

题目中也说了小 I 三言两语道出了一个多项式算法啊

结论：题目骗我是 NPC，出题人傻逼

部分分及得分分布

20% 的数据：$n \leq 20$，$m \leq 10$，$e \leq 25$ 10% 的数据：$e = nm$ 10% 的数据：保证答案为 m 20% 的数据：保证答案为 0 40% 的数据：$m \leq 100$	100 分：0 人 一片 60 分

算法一

20% 的数据：$n \leq 20$，$m \leq 10$，$e \leq 25$

搜索，搜每个球放进哪个筐子，至多要枚举球的度数之积个方案。

又度数之和为 e，那么最坏时间复杂度为 $O\left(\left(\frac{e}{n}\right)^n\right)$

所以搜得出，可以通过 1, 2 号测试点获得 20 分。

算法二

10% 的数据：$e = nm$

每个球可以放进任意一个筐子，那么最优解显然是：

- 先每个筐子放 1 个球
- 如果有剩余，把装 1 个球的筐子一个个填充，放满了一个筐子再去放下一个筐子

可以通过 3 号测试点获得 10 分。

算法三

10% 的数据：保证答案为 m

最优解中每个筐子都是半空的，那么就是经典的二分图最大匹配问题。

用匈牙利或者最大流。

可以通过 4 号测试点获得 10 分。

算法四

20% 的数据：保证答案为 0

最优解中每个筐子都是满的，那么就是允许右边的点匹配三次的多重匹配问题。

把一个筐子结点拆成 3 个，用匈牙利；

或者直接用最大流。

可以通过 5, 6 号测试点获得 20 分。

算法五

把算法一二三四都实现一遍拼起来，可以通过 1, 2, 3, 4, 5, 6 号测试点获得 60 分。

算法六

想要解决整道题，就得处理 $m \leq 100$ 的情况。

范围好大，爆搜不能，怎么办呢？

图论问题的建模

当今社会，尽管仙人掌横行，但还是不乏脑洞大开的图论好题。

我们对于出题人的嘿嘿嘿，我们有一些图论的建模方法：

- 网络流（例子太多）
- 差分约束（例子太多）
- 最小生成树（BZOJ 2753 SCOI2012 滑雪与时间胶囊）
- 最小树形图（Topcoder SRM 584 900pts FoxTheLinguist）
- ……

建模的新方法

介绍新方法之前，你得知道这件事：

比赛前一天刘研绎同学精彩地讲解了各个 NPC 问题之间的归约方法。

对，在 NPC 的世界建模更加花样繁多。

这个新方法我是从把 3-SAT 归约到 Vertex Cover 问题的方法想到的。

为了攘除数据结构，匡扶数学，我就出了这么一道题。

归约到最大匹配

对于第 k 个球，建立 1 个结点 a_k

对于第 k 个筐子，建立 3 个结点 b_k^1, b_k^2, b_k^3，并且把 b_k^1, b_k^2, b_k^3 连成一个三元环。

即，连边 $(b_k^1, b_k^2), (b_k^2, b_k^3), (b_k^3, b_k^1)$

对于一个“i 号球能放进 j 号筐子”的条件，我们让 a_i 向 b_j^1, b_j^2, b_j^3 分别连边。

即，连边 $(a_i, b_j^1), (a_i, b_j^2), (a_i, b_j^3)$

解释

筐子内装的球不超过 3 个意味着可以看做每个筐子有三个槽，每个槽可以放一个球，于是就变成了球和槽进行匹配，b_k^1, b_k^2, b_k^3 就代表了这三个槽。

原问题的解对应一个匹配 如果 b_k^1, b_k^2, b_k^3 中有不超过 1 个匹配点，那么三元环内部可以产生一条匹配边；如果匹配点超过 1 个则内部无法产生一条匹配边。原问题的解可以对应到一个匹配数 $=$ 半空袋子数 $+\ n$ 的匹配。

最大匹配对应一个原问题的解 先依次从 $a_1, \ldots, a_n$ 出发找增广路，再依次从筐子对应的结点出发找增广路，这样可以求得一个 a_k 均为匹配点的最大匹配，显然这对应了原问题的一个解。

无关紧要的小优化

上文中说，“把 b_k^1, b_k^2, b_k^3 连成一个三元环”，事实上，只要连边 (b_k^1, b_k^2) 就行了。

这是因为同一个筐子的槽是等价的。这样，一个最大匹配中某个筐子对应的结点中有一个匹配点的时候可以让 b_k^3 成为匹配点。

怎么求最大匹配？

选手：哈哈我会匈牙利！

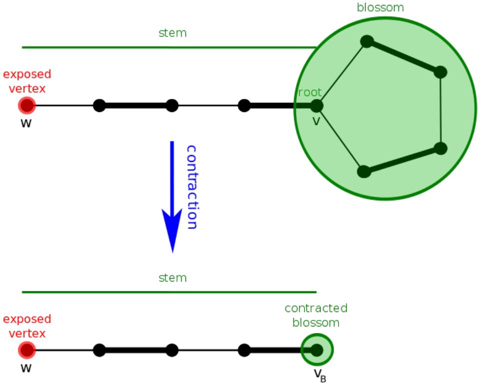
出题人：哦。

选手：那我就能 AC 了啊？

出题人：这不是二分图。

带花树算法（Blossom algorithm）

$O(n+m)$ 个点，$O(nm)$ 条边，时间复杂度 $O((n+m)^3)$。可以通过所有测试点获得 100 分。



[1] 图片来源：https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/eb/Edmonds_blossom.svg?download

我不会带花树啊！！！

- WC 考试是为了从五十人集训队中选出前十五人进入候选队
- 集训队作业里有带花树
- 况且，带花树的资料和题目还是不少的

带花树的学习资料

- http://www.csie.ntnu.edu.tw/~u91029/Matching.html 演算法笔记
- http://fanhq666.blog.163.com/blog/static/819434262012030446358O 范浩强，无向图匹配的带花树算法
- 2015 年中国国家队候选队员论文集，陈胤伯，《浅谈图的匹配算法及其应用》
- UOJ #79. 一般图最大匹配
- Ural 1099 Work Scheduling
- Codechef JAN14 SEAGRP
- 清华集训 2013 理想国

代码太长了啊！！！谁写啊！！！

讲道理，验题人彭雨翔只写了 1KB 多一点。

比你们那些四个算法贴一起的代码短到不知道哪里去了。

挑战 NPC 成功了？

挑战 NPC 的结果是：这就不是个 NPC 问题，实际上可以用带花树算法解决。

严谨点说，你只是感觉它是 NPC，实际上没有人证明一个 NPC 问题能归约到它。如果能归约，那么 NP $=$ P，领图灵奖吧。

挑战 NPC 的启示

不要局限于固有的图论模型，尝试去开拓新的图论模型——比如最大匹配。

这道题是问球的个数 ≤ 1 的筐子最多有多少个，实际上通过调整筐子的建图，≥ 1，≤ 2，≥ 2 都是可做的。

然而求最多有多少个空筐子和最多有多少个满筐子是 NPC 的。

我已经感受到了用最大匹配建模的魅力，欢迎大家踊跃出题。

能够产生新的好题的好题才是真的好题。

讲完啦！

完成一项人生成就：在 WC 中出题！

感谢 CCF 提供学习和交流的平台。

感谢耐心审题、改题面的陈许旻。

感谢跟我讨论题目的室友王鉴浩，神犇刘研绎，教主杜瑜皓。

感谢验题的毒瘤彭雨翔，感谢验题的老司机茹逸中。

谢谢大家！