小Q的苹果树 (apple) 解题报告

Y.B. Zhang

2017 年 4 月 1 日

题目大意

- n个结点的树，结点编号1到n，在树上做部分背包问题

题目大意

- n个结点的树，结点编号1到n，在树上做部分背包问题
- 每一个结点的物品，有a_i个，每一个的价值为v_i

题目大意

- n个结点的树，结点编号1到n，在树上做部分背包问题
- 每一个结点的物品，有a_i个，每一个的价值为v_i
- 限制：一个结点取走了至少一个物品，则其父节点至少也需要取走一个物品

题目大意

- n个结点的树，结点编号1到n，在树上做部分背包问题
- 每一个结点的物品，有a_i个，每一个的价值为v_i
- 限制：一个结点取走了至少一个物品，则其父节点至少也需要取走一个物品
- 假设总计取走了t个物品，取走物品的结点中最大深度为h

题目大意

- n个结点的树，结点编号1到n，在树上做部分背包问题
- 每一个结点的物品，有a_i个，每一个的价值为v_i
- 限制：一个结点取走了至少一个物品，则其父节点至少也需要取走一个物品
- 假设总计取走了t个物品，取走物品的结点中最大深度为h
- 则要求$t - h \leq k$，其中k为给定常数

题目大意

- n个结点的树，结点编号1到n，在树上做部分背包问题
- 每一个结点的物品，有a_i个，每一个的价值为v_i
- 限制：一个结点取走了至少一个物品，则其父节点至少也需要取走一个物品
- 假设总计取走了t个物品，取走物品的结点中最大深度为h
- 则要求$t - h \leq k$，其中k为给定常数
- 对于 100% 的数据，有 $1 \leq nk \leq 2.5 \times 10^7$

数据范围

- 子任务一（10分）：树深度为2，满足$nk \leq 3 \times 10^6$

数据范围

- 子任务一（10分）：树深度为2，满足$nk \le 3 \times 10^6$
- 子任务二（20分）：树深度为2，满足$nk \le 2.5 \times 10^7$

数据范围

- 子任务一（10分）：树深度为2，满足$nk \le 3 \times 10^6$
- 子任务二（20分）：树深度为2，满足$nk \le 2.5 \times 10^7$
- 子任务三（20分）：每一个结点都只有一个物品，满足$nk \le 2.5 \times 10^7$

数据范围

- 子任务一（10分）：树深度为2，满足$nk \leq 3 \times 10^6$
- 子任务二（20分）：树深度为2，满足$nk \leq 2.5 \times 10^7$
- 子任务三（20分）：每一个结点都只有一个物品，满足$nk \leq 2.5 \times 10^7$
- 子任务四（20分）：满足$nk \leq 3 \times 10^6$，没有额外限制

数据范围

- 子任务一（10分）：树深度为2，满足$nk \le 3 \times 10^6$
- 子任务二（20分）：树深度为2，满足$nk \le 2.5 \times 10^7$
- 子任务三（20分）：每一个结点都只有一个物品，满足$nk \le 2.5 \times 10^7$
- 子任务四（20分）：满足$nk \le 3 \times 10^6$，没有额外限制
- 子任务五（30分）：满足$nk \le 2.5 \times 10^7$，没有额外限制

做法 1：多重背包化01背包

- 子任务一（10分）：树深度为2，满足$nk \le 3 \times 10^6$

做法 1：多重背包化01背包

- 子任务一（10分）：树深度为2，满足$nk \leq 3 \times 10^6$
- 把根扔掉（可以最后分类讨论根的取舍情况），就和树结构没有关系了

做法 1：多重背包化01背包

- 子任务一（10分）：树深度为2，满足$nk \leq 3 \times 10^6$
- 把根扔掉（可以最后分类讨论根的取舍情况），就和树结构没有关系了
- 经典的部分背包问题

做法 1：多重背包化01背包

- 子任务一（10分）：树深度为2，满足$nk \le 3 \times 10^6$
- 把根扔掉（可以最后分类讨论根的取舍情况），就和树结构没有关系了
- 经典的部分背包问题
- 把a_i个物品捆绑打包为1个，2个，4个，8个等，化为01背包问题

做法 1：多重背包化01背包

- 子任务一（10分）：树深度为2，满足$nk \le 3 \times 10^6$
- 把根扔掉（可以最后分类讨论根的取舍情况），就和树结构没有关系了
- 经典的部分背包问题
- 把a_i个物品捆绑打包为1个，2个，4个，8个等，化为01背包问题
- 时间复杂度$O(nk \log \max\{a\})$，或者$O(k \sum \log a_i)$

做法 2：多重背包和单调队列优化

- 子任务二（20分）：树深度为2，满足$nk \leq 2.5 \times 10^7$

做法 2：多重背包和单调队列优化

- 子任务二（20分）：树深度为2，满足$nk \leq 2.5 \times 10^7$
- 把根扔掉（可以最后分类讨论根的取舍情况）

做法 2：多重背包和单调队列优化

- 子任务二（20分）：树深度为2，满足$nk \le 2.5 \times 10^7$
- 把根扔掉（可以最后分类讨论根的取舍情况）
- 经典的部分背包问题

做法 2：多重背包和单调队列优化

- 子任务二（20分）：树深度为2，满足$nk \leq 2.5 \times 10^7$
- 把根扔掉（可以最后分类讨论根的取舍情况）
- 经典的部分背包问题
- 用单调队列优化转移，转移对应了区间最值

做法 2：多重背包和单调队列优化

- 子任务二（20分）：树深度为2，满足$nk \le 2.5 \times 10^7$
- 把根扔掉（可以最后分类讨论根的取舍情况）
- 经典的部分背包问题
- 用单调队列优化转移，转移对应了区间最值
- 时间复杂度$O(nk)$

做法 3：树上的带限制01背包

- 子任务三（20分）：每一个结点都只有一个物品，满足$nk \leq 2.5 \times 10^7$

做法 3：树上的带限制01背包

- 子任务三（20分）：每一个结点都只有一个物品，满足$nk \le 2.5 \times 10^7$
- 考虑树的后序遍历$p_1, p_2, \cdots, c_n$

做法 3：树上的带限制01背包

- 子任务三（20分）：每一个结点都只有一个物品，满足$nk \leq 2.5 \times 10^7$
- 考虑树的后序遍历$p_1, p_2, \cdots, c_n$
- 记状态$F[i][j]$表示后序遍历中前$i-1$个结点选择了j个物品可以得到的最大收益

做法 3：树上的带限制01背包

- 子任务三（20分）：每一个结点都只有一个物品，满足$nk \le 2.5 \times 10^7$
- 考虑树的后序遍历$p_1, p_2, \cdots, c_n$
- 记状态$F[i][j]$表示后序遍历中前$i-1$个结点选择了j个物品可以得到的最大收益
- 转移需要考察p_i的所有子节点，和p_i为根的子树左侧的最后一个结点

做法 3(cont)：树上的带限制01背包

- 考虑任意结点x，若选择了x结点的物品，则

做法 3(cont)：树上的带限制01背包

- 考虑任意结点x，若选择了x结点的物品，则
- （1）除了x到根的路径以外，选择了$t - height(x)$个物品

做法 3(cont)：树上的带限制01背包

- 考虑任意结点x，若选择了x结点的物品，则
- （1）除了x到根的路径以外，选择了$t - height(x)$个物品
- （2）$t - height(x) \geq t - h$且$t - h \leq k$

做法 3(cont)：树上的带限制01背包

- 考虑任意结点x，若选择了x结点的物品，则
- （1）除了x到根的路径以外，选择了$t - height(x)$个物品
- （2）$t - height(x) \geq t - h$且$t - h \leq k$
- （3）不妨枚举所有的叶子结点x（因为$v_i > 0$），在x到根的路径以外选择最多k个物品（实际上就是选择恰好k个物品，因为$v_i > 0$）

做法 3(cont)：树上的带限制01背包

- 考虑任意结点x，若选择了x结点的物品，则
- （1）除了x到根的路径以外，选择了$t - height(x)$个物品
- （2）$t - height(x) \geq t - h$且$t - h \leq k$
- （3）不妨枚举所有的叶子结点x（因为$v_i > 0$），在x到根的路径以外选择最多k个物品（实际上就是选择恰好k个物品，因为$v_i > 0$）
- 时间复杂度$O(nk)$

做法 4：树上的带限制部分背包化01背包

- 子任务四（20分）：满足$nk \leq 3 \times 10^6$，没有额外限制

做法 4：树上的带限制部分背包化01背包

- 子任务四（20分）：满足$nk \le 3 \times 10^6$，没有额外限制
- 如果结点x有a_i个物品，则只有在x结点拿了第一个物品，才会那第二第三个

做法 4：树上的带限制部分背包化01背包

- 子任务四（20分）：满足$nk \le 3 \times 10^6$，没有额外限制
- 如果结点x有a_i个物品，则只有在x结点拿了第一个物品，才会那第二第三个
- 在x结点新增$v_i - 1$个子节点（他们都是叶子），物品与x相同；这就树上的带限制01背包

做法 4：树上的带限制部分背包化01背包

- 子任务四（20分）：满足$nk \le 3 \times 10^6$，没有额外限制
- 如果结点x有a_i个物品，则只有在x结点拿了第一个物品，才会那第二第三个
- 在x结点新增$v_i - 1$个子节点（他们都是叶子），物品与x相同；这就树上的带限制01背包
- 把这$v_i - 1$个结点捆绑打包，变成$O(\log v_i)$个结点

做法 4：树上的带限制部分背包化01背包

- 子任务四（20分）：满足$nk \le 3 \times 10^6$，没有额外限制
- 如果结点x有a_i个物品，则只有在x结点拿了第一个物品，才会那第二第三个
- 在x结点新增$v_i - 1$个子节点（他们都是叶子），物品与x相同；这就树上的带限制01背包
- 把这$v_i - 1$个结点捆绑打包，变成$O(\log v_i)$个结点
- 时间复杂度$O(k \sum \log a_i)$

做法 4：树上的带限制部分背包

- 子任务五（30分）：满足$nk \le 2.5 \times 10^7$，没有额外限制

做法 4：树上的带限制部分背包

- 子任务五（30分）：满足$nk \le 2.5 \times 10^7$，没有额外限制
- 把上述$v_i - 1$个结点捆绑打包成一个结点

做法 4：树上的带限制部分背包

- 子任务五（30分）：满足$nk \le 2.5 \times 10^7$，没有额外限制
- 把上述$v_i - 1$个结点捆绑打包成一个结点
- 只有在上述这种结点需要考虑多重背包，其余位置都是01背包

做法 4：树上的带限制部分背包

- 子任务五（30分）：满足$nk \le 2.5 \times 10^7$，没有额外限制
- 把上述$v_i - 1$个结点捆绑打包成一个结点
- 只有在上述这种结点需要考虑多重背包，其余位置都是01背包
- 这种特殊结点的插入依然可以用单调队列优化

做法 4：树上的带限制部分背包

- 子任务五（30分）：满足$nk \le 2.5 \times 10^7$，没有额外限制
- 把上述$v_i - 1$个结点捆绑打包成一个结点
- 只有在上述这种结点需要考虑多重背包，其余位置都是01背包
- 这种特殊结点的插入依然可以用单调队列优化
- 时间复杂度$O(nk)$

Thank you!