

The background features a gradient from red at the top to blue at the bottom. Overlaid on this are several faint, white circular patterns and a scale. The scale is a large arc on the left side, with numbers ranging from 140 to 260. There are also smaller circular elements with arrows, suggesting a technical or scientific theme.

《秘密袭击》 试题讲评

猫

吐槽环节 + 梗

- Access Globe
- “你并不想帮他解决这个问题”
- 2666（后来被某 z 姓总负责人强行改成 1666）
- 2017011328（后来因为某些原因改为 64123）
- ↑ 这两个梗属于某 plus 比赛

题意简述

- 给一棵 n 个点的树，每个点的点权在 1 到 W 之间
- 求所有连通块的权值第 k 大的和模 64123
- ~~$k \leq n \leq 2666, W \leq 2666$~~
- $k \leq n \leq 1666, W \leq 1666$
- 时间限制 5s，空间限制很大

送分测试点

- 链的数据连通块都是区间
- 直接枚举区间维护第 k 大
- 用两个堆或平衡树或线段树维护即可

暴力

- 可以转化为 $\sum_{i=1}^W$ 第 k 大不小于 i 的连通块个数
 - 这样第 k 大是 i 的刚好被算了 i 次
- 再转成“连通块中权值不小于 i 的点不少于 k 个”的连通块个数
 - 枚举 i 之后，直接背包， $f(p, j)$
 - $O(n^3)$

学傻了的优化

- 直接用点分治 FFT 优化这个背包
- $O(Wn \log^3 n)$
- 写不出来，常数超大，T 到飞起

好一些的优化

- 将点按权值排序依次加入树中
- 单点修改，维护背包数组的 DP 值
- 使用动态 DP 理论（链分治）瞎 ** 维护一下
- 最好可以做到 $O(nW \log^2 n)$
- 难写，我专门卡了（卡法同《即时战略》卡随机剖分）

合并状态

- 首先我们需要把这个 DP 写成一个好优化的形式
- 外面枚举一个 i ，这样看起来只能动态 DP
- 把 i 记录到状态里去！
 - $f(p, i, j)$: p 子树中不小于 i 的点有 j 个的连通块个数

转移

- 初始化 p
 - 给 $f(p, [1, d_p], *)$ 这个区间添加物品
- 添加一个孩子的时候
 - i 这一维对应位置合并背包
- 区间修改 $\rightarrow$ 线段树
- 还要对应位置相乘 $\rightarrow$ 线段树合并!

求答案

- 最后求所有 $f(*, [1, W], [k + 1, n])$ 的和, 不能每次遍历数组
- 对状态进行修改, $g(p, i, j)$ 表示 p 子树中的 f 和
- g 从孩子的转移也是对应位置相加
- g 从 f 的转移可以用矩阵表示
 - 从而只需把线段树标记换成矩阵
 - 每次做完一个点后, 整个区间 (第二维) 乘矩阵更新 g

优化

- 合并背包数组是 $O(k^2)$ 的，复杂度为 $O(nk^2 \log W)$
 - 根据实现可以获得很多分
- 背包合并的本质是多项式卷积
 - $ax^2 * bx^3 = abx^5$
- 卷积 $f(x)$ 和 $g(x)$ 复杂度为 k^2 (k 为最高次项即背包容量)

优化

- 如果存了 $[f(1), f(2), \dots, f(k)]$ 和 $[g(1), g(2), \dots, g(k)]$
- 那么
 - $[(fg)(1), (fg)(2), \dots, (fg)(k)] = [f(1)g(1), f(2)g(2), f(k)g(k)]$
 - 加法同样成立
- 并且有了 $[f(1), f(2), \dots, f(k)]$ 后也可以还原出 f 的系数
 - 高斯消元或（拉格朗日）插值
 - 从而还原背包

优化

- 在计算过程中 $[f(1), f(2), \dots, f(n)]$ 代替背包
 - 注意这里必须到 n
 - 所有的加减乘都是 $O(n)$
- 最后花 $O(n^2)$ 还原背包
- 这个算法就是 FFT 的本质，但模数不支持 NTT
- 结合前面的线段树合并，我们获得 $O(n^2 \log W)$ 的算法通过本题！

这题是不是很水啊

- 思路较为灵活，实现不是很困难
- 是一道难度中上的 DP 题，考察了线段树的灵活运用和简单数学
- 而你笑道正解无用 暴力把分送 AK 都轻松 ~~松松松松松~~
- 祝大家 Day2 顺利
- EOF