

林克卡特树

清华大学命题组

Apr. 6th, 2018

Emmmmm.....

- 题面啥意思？
 - 林克（Link）是来源于任天堂经典 IP 塞尔达传说的一个游戏角色
 - ~~著名小绿帽~~
 - LCT 是一个经典数据结构，可以动态地维护树的形态
- 小 L 是谁？
 - TDO 的好朋友
- TDO 是谁？
 - 某 C 国著名科学家的好朋友
- 这题为什么这么水？
 -



算法一

- $K = 0$
- 妈妈我会求树的直径！

算法二

- $K = 1$
- 我知道，这种题的套路就是枚举删掉那条边，然后子树内和子树外分别算一个直径！接起来就好了！

算法三

- $K = 2$
- 我会分类讨论！
- 唔手动讨论不来...那就写个 DP 吧

算法四

- $K \leq 100$
- 我们冷静分析一下 DP 该怎么写
- 问题似乎等价于选 $K+1$ 条点不相交的链哎！
- $F(x, k, i)$ 表示考虑以 x 为根的子树，选了 k 条链，点 x 的度数为 $0/1/2$ 的最优解

算法五

- K 和 N 同级，怎么办呢？
- 反正闲着也是闲着，我把 DP 数组打印出来吧！
 - 你很快写了个暴力，把 `best[k]`（表示选了 k 条链的最优解）打了出来
- 唔这个 DP 数组好难看啊，我来把它差分一下！
- 哎...我发现了什么了不得了的规律
 - 似乎差分之后的数组是递减的哎？

算法五 cont'd

- 如上所述，令 $\text{best}[k]$ 表示题目中 ‘K’ 取 k 的答案，那么 $\text{best}[]$ 是一个上凸的函数。
- 考虑用一条直线去切这个函数，我们选定一个斜率 slope ，即可通过一个简单的线性 DP 算出这个斜率对应的切点
 - 相当于每选一条链要额外支付 slope 的代价
- 把上述的 DP 看作一个“黑盒子”，我们有：
 - 输入一个斜率，黑盒子可以计算出这个斜率对应直线和函数的切点之坐标
 - 我们希望算出 $\text{best}[k]$ 的值
- 考虑如何找到一个合适的斜率使得切点落在 $(k, \text{best}[k])$
 - 不难发现可以二分！
 - 二分一个斜率之后，使用黑盒计算出它和函数的切点，根据切点在 k 的左/右，决定将直线逆时针/顺时针旋转即可
- 时间复杂度 $O(N \log W)$ ，可以获得 100 分！
- 聪明的你一定能出色地完成这一任务！

Thanks

- 在这里祝贺要进队的小朋友们！
- 祝所有同学学业顺利，生活愉快！