

《制胡窜》码农报告

突然发现没给自己起名字好慌怎么办会不会被发现是第一次出题

题目·梗

▶ （天哪竟然连故事背景也没写，这个出题人真是太懒了）

▶ 那这一页也读不下去了

讨论环节



题目大意

- ▶ 给定一个长度为 N 的字符串，多次询问一个子串 $[L,R]$ ，求有多少种把字符串划分成三个非空串的和的方式，使得该子串出现在至少一个划分出的串中。
- ▶ $N \leq 100000$ ， 询问次数 ≤ 300000 。

算法一

- ▶ 暴力枚举三个串之间的两个断点，加上KMP，复杂度妥妥的 $O(QN^3)$ ，舒服。
- ▶ 期望得分5~15分。

算法二

- ▶ 凭什么要每次枚举完再跑KMP呢，每次询问跑一次就够了嘛。
- ▶ 复杂度 $O(QN^2)$ 。
- ▶ 期望得分15分。

算法三

- ▶ 在算法二的基础上，枚举断点的过程是可以优化的，对于中间的串 $S[i+1, j-1]$ ，假如要让这个串包含询问串，那么我们从小往大枚举 $i+1$ ，可行的最小的 $j-1$ 是单调递增的。每次询问先跑KMP，再用Two-Pointer扫一遍即可。一头一尾两个串处理起来十分容易，每次询问可以 $O(N)$ 处理。
- ▶ 总复杂度 $O(NQ)$ 。
- ▶ 期望得分25分~40分。

算法四

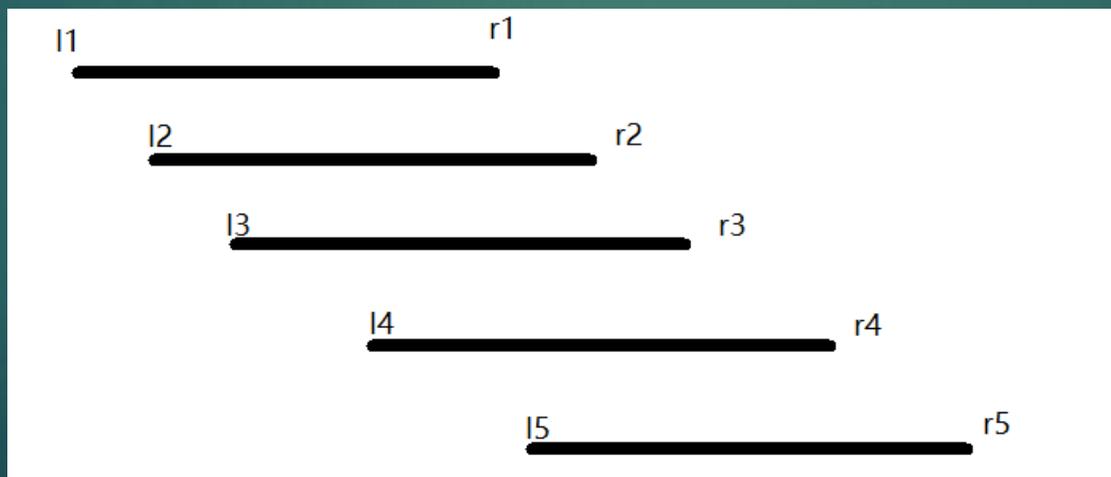
- ▶ 考虑算法三的缺陷，一是需要每次用KMP求出串的每个出现位置。很容易想到用SAM来优化这个过程，那么可以做到和询问串总长线性相关的复杂度。
- ▶ 这个地方比较舒服了之后，再看看求解的过程。考虑反过来，求三个串都不包含询问串的方案数，这样需要的讨论会少很多。不难发现，三个串都不包含询问串的方案，就是询问串每个出现位置里（这里的位置指的是整个串，不是右端点），都至少含有一个断点的方案数

算法四

- ▶ 可以对求解的过程分成两类：
 - ▶ 1.有三个互不相交的出现位置。这种情况不会出现不合法（没有串包含询问串）的情况。
 - ▶ 2.顺次考虑所有出现位置，（见下页，在下灵魂画图手）

灵魂画图手

- ▶ 如下图所示，每一个线段表示询问串在原串中的一个出现位置。所有线段构成了所有出现位置。 这种情况下，可以顺次枚举第一个断点所在的位置。
- ▶ 例如， 第一个断点在 $[l_1, l_2)$ 区间的情况下，第二个断点需要在 $[l_5, r_2]$ 内。这种情况的方案数就是 $(l_2 - l_1) * (r_2 - l_5 + 1)$
- ▶ （大致如此，根据实现细节不同可能会有常数上的微调，并不影响算法）。



接上页

- ▶ 所以我们可以发现，计算最后不合法的方案数时，可以枚举第一个断点覆盖的最右的出现位置，记为第 j 个出现位置，此时的方案数即为（第一条线段与 $[l_j, l_{j+1})$ 的交）*（第 $j+1$ 条线段与最后一条线段的交）。
- ▶ 对于第一个括号，大部分情况都是 $(l_{j+1}-l_j)$ ，事实上也是 $(r_{j+1}-r_j)$ ，因为出现位置长度都一样。对于第二个括号，大部分情况都是 $(r_{j+1}-l_{j+1}+1)$ ， l_{j+1} 表示最右出现位置左端点。
- ▶ 边界情况是可以特判掉的，因为都最多需要特判1个。
- ▶ 下面考虑通用情况。

接上页

- ▶ 所求即 $\sum (r_{i+1}-r_i)*(r_{i+1}-l_i+1)$ ，括号拆开，所求即 $\sum (r_{i+1}-r_i)*r_{i+1}$ 与 $\sum (r_{i+1}-r_i)$ 。
- ▶ （当然拆是还可以再拆，但是已经可以做了）
- ▶ 此时的答案已经仅与所有出现位置右端点相关，我们试图在后缀自动机上维护。
- ▶ 我们需要维护的是出现位置的偏序关系，以及相邻两个位置的信息。同时出现位置在后缀自动机中，是用parent树来刻画的。我们可以轻松的想到线段树合并。

接上页

- ▶ 这个线段树要维护的东西就很直白明了了
- ▶ 每次询问的时候走一遍后缀自动机定位，复杂度 $O(\sum | \text{询问串} | + N + (N+Q) \log N)$
- ▶ 期望得分45分。

算法五

- ▶ 将询问串定位到后缀自动机上的时候，使用parent树上倍增去定位就好了。复杂度轻松变成 $O(N + (N+Q) \log N)$
- ▶ 期望得分100分。

算法六

- ▶ 对于 $N \leq 30000$, $Q \leq 50000$ 的范围, 有什么高论做法吗?
- ▶ 偷偷假设你不会parent树上倍增, 你可以分块预处理定位子串的过程, 稳!

算法七

- ▶ 对于S全部是0的情况。
- ▶ 算了太水了，其实我没算过公式，但是显然是可以做的对吧
- ▶ 稳。

题外话

- ▶ 为什么会出这么一道，一点意思都没有，还很码农的题呢。
- ▶ 主要是因为，tmd出题的时候翻了一下考点，发现好多东西都没考。
- ▶ 于是出了一个大杂烩，其实本来还打算套个k短路之类的xxx（毕竟有个树，树可以投影到平面上是吧）。

结语

- ▶ 我不得不和烈士和小丑走在同一道路上，
- ▶ 万人都要将火熄灭，
- ▶ 我一人独将此火高高举起，
- ▶ 我借此火得度一生的茫茫黑夜。

▶ ——海子 《以梦为马》