

皮配 解题报告

清华大学 计算机科学与技术系 王聿中

清华大学 计算机科学与技术系 茹逸中

题目大意

- 有 4 个背包，分别为(红/蓝)(0/1)，给定如下两个限制：
 - 颜色相同的背包有容量总和限制
 - 编号相同的背包有容量综合限制
- 有 n 个物品和 c 个集合，每个物品属于恰好一个集合。
- 每个物品必须被放进一个背包，属于相同集合的物品必须被放入相同颜色的背包。
- 有额外 k 个限制，每个限制规定了一个物品不能被放入某一个背包。
- 求方案数对大质数取模。
- $n \leq 1000$, $M \leq 2500$, $k \leq 30$, 物品重量 ≤ 10

算法一

- 输出 $1 - k$
- 期望得分: 10
- (想一想, 为什么?)

算法二

- 暴力枚举每个物品所属背包并判断
- 时间复杂度: $O(2^n)$
- 期望得分: 20

算法三

- 考虑动态规划
- 先将所有物品按所属集合排序，接着同集合内的物品一起 DP
- $dp[t][i][j][0 \text{ or } 1]$ 表示：
 - 考虑前 t 个物品
 - 蓝背包已用容量为 i (则红背包已用容量可以计算得到)
 - 0 背包已用容量为 j (则 1 背包已用容量可以计算得到)
- 可以轻易地设计出转移。
- 可以使用滚动数组优化空间
- 时间复杂度: $O(nm^2)$
- 期望得分: 50

$k = 0$ 时的性质

- 我们考虑把物品放入背包的过程，事实上我们可以认为它分为两个步骤：
 - 为集合选择颜色
 - 为物品选择编号
- 对于 $k = 0$ 的测试点，我们可以注意到，这两个步骤互不相干（即相互独立）。
- 则我们不妨分开考虑，并使用乘法原理将这两个子问题的答案相乘，即是我们要求的答案。

算法四 (针对 $k = 0$)

- 暴力枚举 c 个集合的颜色可能，得到染色方案数。
- 暴力枚举 n 个集合的编号可能，得到编号方案数。
- 相乘即得到答案。
- 时间复杂度： $O(2^n)$
- 期望得分：10
- 结合算法一或算法二可以获得更高的分数

算法五 (针对 $k = 0$)

- 注意到给集合染色、给物品编号这两个问题均是经典的背包问题。
- 因此分开背包即可得到它们的答案。
- 时间复杂度: $O(nm)$
- 期望得分: 40
- 结合算法三的期望得分: 70

算法六

- 对于 $k > 0$ 的情况，我们注意到，对于没有额外限制的物品，它们的编号仍与所有集合染色、所有其他物品编号互不相干。
- 因此，对于这些物品的编号，我们单独用背包进行计算。其余部分的方案数使用类似算法三的方法计算即可。
- 时间复杂度： $O(cm^2 + nm)$
- 期望得分： 70
- 结合算法五的期望得分： 80

算法七

- 我们再注意到，对于不存在额外限制物品的集合，它们的染色仍与所有集合染色、所有其他物品编号互不相干。
- 因此，对于这些集合的染色，我们单独用背包进行计算。其余部分的方案数计算方法与算法六一致。
- 注意做高维 DP 时，由于有限制的物品数少、物品最大重量小，背包最大容量将远小于限制，针对此做优化可以获得更优的时间效率。
- 时间复杂度： $O(km^2)$ 或 $O(km \cdot \min(m, k \cdot \max\{s_i\}))$
- 期望得分：90 或 100

QA & Talks

花絮 1

题目来历

- 去年九省省选时：Yazid 在给选手排座位时想到了此题（原型）
 - 每个背包都有单独的容量限制
 - 没有额外限制
- 3 月的某一天：Yazid 投题
- 3.22：Yazid 突然发现自己只会暴力高维 DP
- 3.24：小 R 声称会更优的做法，并与 Yazid 一起设计了标程
- 3.30：小 R 造完了数据，并和 Yazid 的标程拍上
- 3.31 凌晨：Yazid 的暴力无法通过，研究发现标算是假的
- 3.31 白天：小 R 提出新的背包容量限制方案
- 3.31 晚上：小 R 提出额外限制，并设计出算法五
- 3.31 更晚：Yazid 设计出算法六
- 4.2：Yazid 在写标程时设计出算法七



ljt12138

此题并不难（指 std 900 行

周一 19:03



tqyaaaaang

哪到 900 行啊



tqyaaaaang

才 858 行

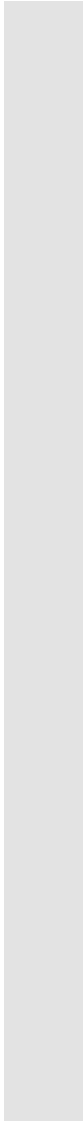
花絮 2



tqyaaaaang

选手命要没了

- 在这样一场毒瘤的省选中
- 这道题目无疑是命题人无私的馈赠
- 大量精心构造的部分分，涵盖了题目中所有涉及的算法
- 你可以利用这道题目，对你是否能够进入省队进行初步检查
- 经典的模型、较低的难度和不大的代码量，能帮助你把分数收入囊中
- 出题人相信，这个美妙的题目，可以给拼搏于省队的逐梦之路上的你，提供一个有力的援助。



FIN

Questions are welcome.