

Zadanie K

Duch

Zgłoszeń: 21

Zaakceptowanych: ??

Pierwsze rozwiązanie:
?

Autor: Krzysztof Maziarz



Dane są prostokąty, każdy poruszający się ruchem liniowym z jakimś wektorem prędkości. Policz największe pole przecięcia prostokątów w każdym z zadanych przedziałów czasu.



Każdy prostokąt daje cztery niezależne ograniczenia (półpłaszczyzny) na przecięcie prostokątów: dolne i górne ograniczenie na x oraz na y .

Skupmy się na analizowaniu i wyznaczaniu ograniczeń na x .



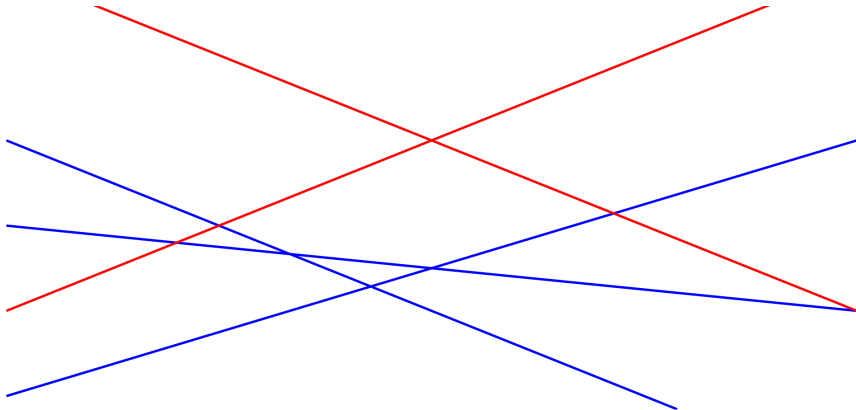
Każdy prostokąt wyznacza następujące ograniczenia w momencie t :

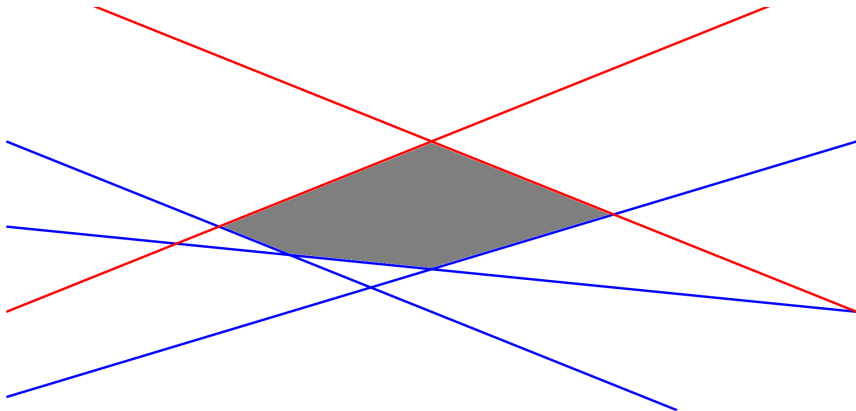
$$x \geq x_1 + t \cdot v_x$$

$$x \leq x_2 + t \cdot v_x$$

N ograniczeń dolnych daje nam N funkcji liniowych (półpłaszczyzn), to samo dla górnych.







Wysokość obszaru pomiędzy ograniczeniami dolnymi a górnymi jest równa szerokości przecięcia prostokątów z zadania, co nazwiemy $\text{szer}(t)$ dla momentu t .



Wysokość obszaru pomiędzy ograniczeniami dolnymi a górnymi jest równa szerokości przecięcia prostokątów z zadania, co nazwiemy $\text{szer}(t)$ dla momentu t .

Funkcja $\text{szer}(t)$ jest bitoniczna, kawałkami liniowa oraz wklęsła, o ile ograniczymy się do przedziału czasu t , gdzie jest to funkcja niezerowa.



Funkcja $wys(t)$ (dla współrzędnych y) spełnia podobne własności. Interesuje nas maksymalizowanie pola przecięcia czyli:

$$pole(t) = szer(t) \cdot wys(t)$$

co jest bitoniczną funkcją kawałkami kwadratową.



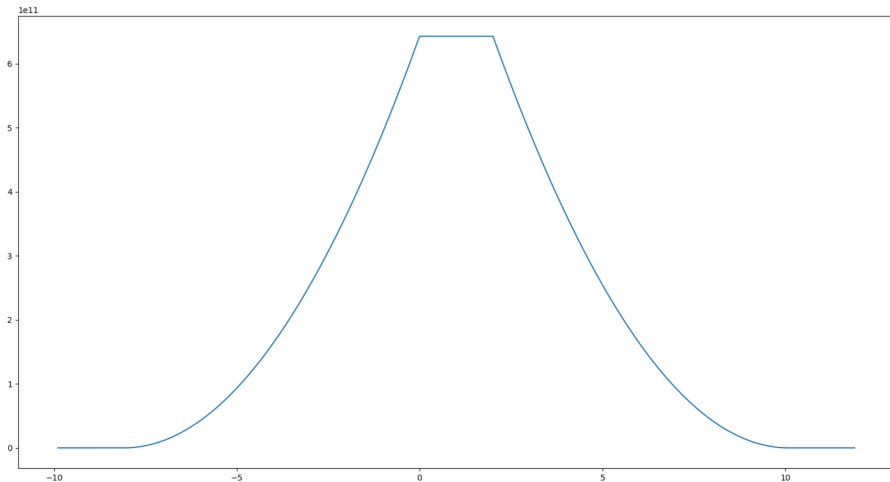
Funkcja $wys(t)$ (dla współrzędnych y) spełnia podobne własności. Interesuje nas maksymalizowanie pola przecięcia czyli:

$$pole(t) = szer(t) \cdot wys(t)$$

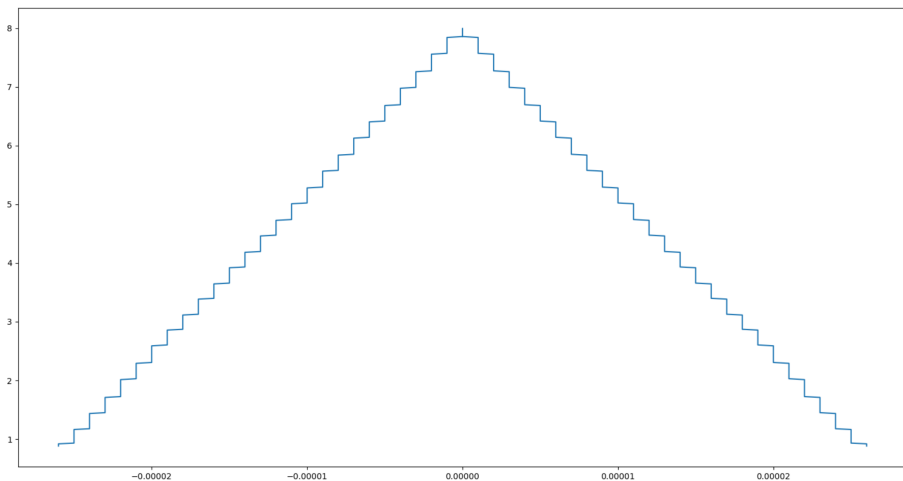
co jest bitoniczną funkcją kawałkami kwadratową.

Dowód bitoniczności pozostawiamy czytelnikowi.





Funkcja $pole(t)$ nie musi być ani wypukła ani wklęsła.
(a nawet różnie bywa)



Funkcja $pole(t)$ nie musi być ani wypukła ani wklęsła.
(a te schodki nie są idealnie poziome)

Rozwiązanie I (bez bitoniczności)

Zbieramy ograniczenia na x i wyznaczamy przecięcie półpłaszczyzn, to samo dla y . Dzielimy czas na $\mathcal{O}(n)$ przedziałików, takich że w każdym $szer(t)$ oraz $wys(t)$ są funkcjami liniowymi – wtedy ich iloczyn jest funkcją kwadratową.

W każdym przedziałiku szukamy maksimum wzorem lub wyszukiwaniem ternarnym, budujemy na tych wartościach drzewo przedziałowe i w $\mathcal{O}(\log n)$ odpowiadamy na zapytania, uważając na końcówki przedziału z zapytania.



Da się łatwiej. Skoro funkcja $pole(t)$ jest bitoniczna, to kusi wyszukiwanie ternarne, by znaleźć globalne maksimum.

Ale nie da się wyszukiwać ternarnie po funkcji, która ma remis poza maksimum!



Da się łatwiej. Skoro funkcja $pole(t)$ jest bitoniczna, to kusi wyszukiwanie ternarne, by znaleźć globalne maksimum.

Ale nie da się wyszukiwać ternarnie po funkcji, która ma remis poza maksimum!

...więc ograniczamy się do przedziału czasu, gdzie wartości są niezerowe. Tam funkcja $pole(t)$ ściśle rośnie, potem być może ma remis na maksimum, potem ściśle maleje.



Rozwiązanie II (z bitonicznością)

Po znalezieniu przecięcia półpłaszczyzn wyszukujemy ternarnie (lub binarnie po pochodnej) globalne maksimum.

Jeśli zapytanie zawiera ten optymalny moment, to znamy od razu wynik. Jeśli nie, to wystarczy rozważyć tylko początek i koniec przedziału.

W tych dwóch momentach liczymy wynik przez policzenie $szer(t)$ i $wys(t)$ (wyszukujemy binarnie odcinek otoczki w którym ląduje t).



Złożoność obu rozwiązań to zgrubsza $\mathcal{O}(n \log n)$. Rozwiązanie II ma logarytm z trochę większej wartości, bo musimy zrobić ternary search po zakresie (i do zadanej dokładności).

Ciekawostka: Rozwiązanie I da się zaimplementować w arytmetyce liczb wymiernych.

