



# 壊れた機器 (Broken Device) 解説

伊佐 碩恭 (HIR180) – IOI 2014日本代表

# 問題概要

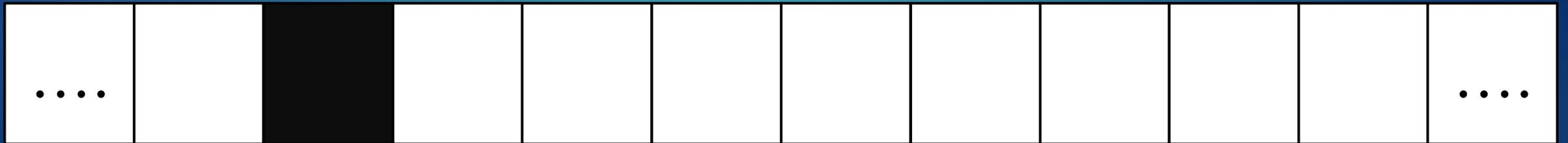
- ▶ AnnaはBrunoに非負整数 $X$  ( $\leq 10^{18}$ )を伝えるために長さ $N$  ( $=150$ )の0/1列を送る。
- ▶ しかし、0/1列を送ることができるのは1回のみで、機器の故障のため特定の桁についてはAnnaの設定した値に関わらず0になってしまう。
- ▶ 機器の故障箇所はAnnaには分かるがBrunoには分からず、故障箇所の個数は $K$  ( $\leq 40$ )である。
- ▶ 以上の操作を $Q$  ( $\leq 1000$ )回繰り返す。

# $L^* = 1$ (8点)

- ▶ 1個だけ壊れている場合を考える。
- ▶  $X$ は高々 $10^{18}$ なので、 $2^{59} < 10^{18} < 2^{60}$ に注意すると150個の桁のうち60個使えば良いことがわかる。
- ▶ 2つに分割して全部生きている方のみを使えばよい。

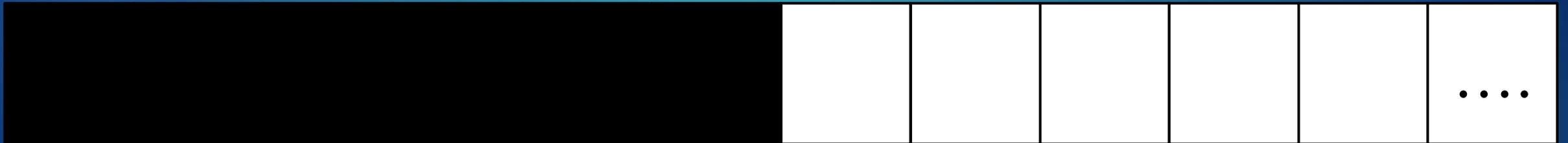
$L^* = 1$  (8点)

以下の例では左半分に壊れた箇所があるため、



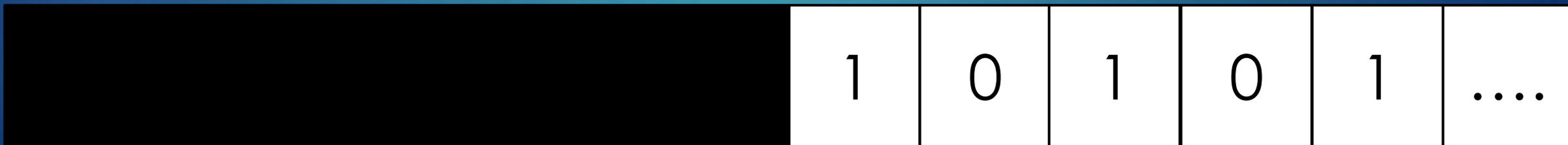
$L^* = 1$  (8点)

左半分は全く使わない。(すべて0に設定)



$L^* = 1$  (8点)

右半分はすべての桁が生きているので、普通に送れる。



# $L^* = 15$ (41点)

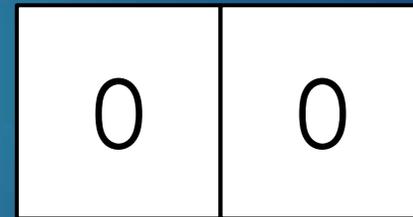
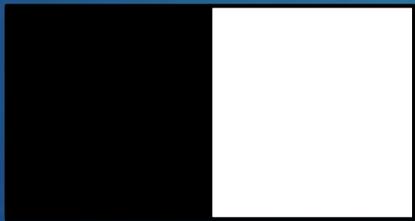
- ▶ さっきの解法はあまりに無駄が多すぎる。
- ▶ 150桁を2桁  $\times$  75 に分けることを考える。
- ▶ 壊れている桁は高々15個だから  $75 - 15 = 60$ 組は2桁とも生きているはず。
- ▶ 4枚前のスライドにも書いた通りXを伝えるには60個の0/1を送ればよいため、1組につき1個送ればよさそう。

$L^* = 15$  (41点)

- ▶ 組の中で1つでも壊れている場合は無条件で「00」を送ることにする。
- ▶ 両方生きている場合は左に1、右に送りたい桁を設定する。

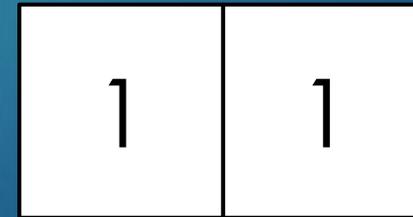
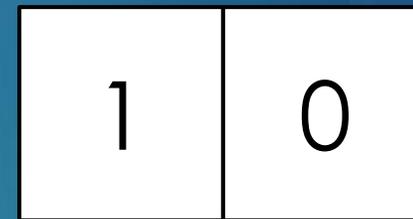
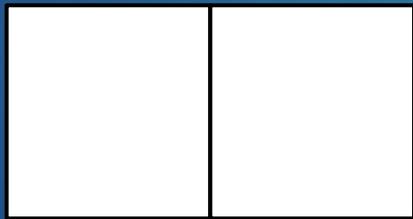
$L^* = 15$  (41点)

- ▶ 組の中で1つでも壊れている場合は無条件で「00」を送ることにする。



$L^* = 15$  (41点)

- ▶ 両方生きている場合は左に1、右に送りたい桁を設定する。



$$L^* = 15 \text{ (41点)}$$

- ▶ こうすることで、少なくとも $75-15 = 60$ 桁の情報を送れるため、 $X$ を正しく伝えることができ、41点が得られる。

$L^* = 20$  (51点)

- ▶ さっきは2桁 × 75に区切ったが、今度は3桁 × 50に区切ってみる。
- ▶ 組の中で1つでも壊れている場合は無条件で「000」を送ることにする。
- ▶ 全て生きている場合は1番左に1、残り2桁に送りたい桁を設定する。

$$L^* = 20 \text{ (51点)}$$

- ▶ すると、Xに関する少なくとも  $(150 \div 3 - 20) \times 2 = 60$  桁の情報を送ることができ、51点が得られる。

$L^* = 24$  (59点)

- ▶ さっきの場合、3桁中1つしか壊れていない場合でも他の2つも無効化してしまっていて無駄が多い。
- ▶ 3桁中1つしか壊れていないような組も情報を持たせたい。
- ▶ 例えば以下のように3桁の0/1列と0,1,2を対応させる:  
「001」 「110」 : 0  
「010」 「101」 : 1  
「100」 「011」 : 2

$$L^* = 24 \text{ (59点)}$$

- ▶ このとき、3桁中高々1つしか壊れていないならば0,1,2のいずれが割り当てられても、対応された3桁の0/1列のどちらかは送ることができる。
- ▶ 最悪ケースでは50組中 $24 \div 2 = 12$ 組潰れる(3桁中2つずつ壊れる)ため、少なくとも $(50-12=)$ 38個の0,1,2を送ることができるため、 $3^{37} < 10^{18} < 3^{38}$ よりXを正しく送ることができ、59点が得られる。

$L^* = 37$  (85点)

- ▶  $L^* = 15$ の解法をもう一度振り返ってみましょう

# $L^* = 15$ (41点) (再掲)

- ▶ 組の中で1つでも壊れている場合は無条件で「00」を送ることにする。
- ▶ 両方生きている場合は左に1、右に送りたい桁を設定する。

# $L^* = 15$ (41点) (再掲)

- ▶ 組の中で1つでも壊れている場合は無条件で「00」を送ることにする。
- ▶ 両方生きている場合は左に1、右に送りたい桁を設定する。  
(「10」「11」)

# $L^* = 15$ (41点) (再掲)

- ▶ 組の中で1つでも壊れている場合は無条件で「00」を送ることにする。
- ▶ 両方生きている場合は左に1、右に送りたい桁を設定する。  
(「10」「11」)← ????????

$L^* = 37$  (85点)

- ▶ 組の中で1つでも壊れている場合は無条件で「00」を送ることにする。
- ▶ 両方生きている場合は「10」「11」「01」を送る

$L^* = 37$  (85点)

- ▶ 「10」「11」「01」それぞれに0,1,2を割り振れば、少なくとも $150 \div 2 - 37 = 38$ 個の0,1,2を送れるため、正しくXを送ることができ、85点が得られる。

$L^* = 40$  (100点) (解法1)

- ▶  $L^* = 20$ の解法をもう一度振り返ってみましょう

# $L^* = 20$ (51点) (再掲)

- ▶ さっきは2桁 × 75に区切ったが、今度は3桁 × 50に区切ってみる。
- ▶ 組の中で1つでも壊れている場合は無条件で「000」を送ることにする。
- ▶ 全て生きている場合は1番左に1、残り2桁に送りたい桁を設定する。

# $L^* = 40$ (100点) (解法1)

- ▶ これまでと同様に3桁中2つ生きている組も情報を送ることを考える。
- ▶ 3桁の0/1列とXに関する情報をうまく対応させることで、3桁とも生きている組は2桁, 2つ生きている組は1桁の情報を必ず送ることができる例を示す。

$L^* = 40$  (100点) (解法1)

▶ 対応の例

「000」：何も情報を送らない

「001」：「1」を送る

「010」：「0」を送る

「011」：「10」を送る

「100」：「00」を送る

「101」：「01」を送る

「110」：「1」を送る

「111」：「11」を送る

# $L^* = 40$ (100点) (解法1)

- ▶ 3桁とも使えるなら当然2桁の情報を送れる。
- ▶ 1つ壊れている時でも「1」を送ることはできる。(「001」と「110」がどちらも「1」を表し、どちらかは送ることができるから)
- ▶ 「0」を送りたいときは、「010」が対応するので、真ん中の桁が壊れていなければOKで、その時は「100」と「101」がそれぞれ「00」と「01」に対応しているから2桁の情報を送ることができる。

# $L^* = 40$ (100点) (解法1)

- ▶ この時3桁とも生きている時は2桁、2つ生きている時は1桁、2つ以上壊れている時は0桁の情報を送ることができる。
- ▶ 壊れていなければ  $150 \div 3 \times 2 = 100$  桁の情報を送ることができ、1桁壊れるとき高々1桁減るだけだからXに関する情報が最低でも  $100 - 40 = 60$  桁送れるため、上手くいく。

$L^* = 40$  (100点) (解法2)

- ▶  $L^* = 37$ の解法をもう一度振り返ってみましょう

$L^* = 37$  (85点) (再掲)

- ▶ 組の中で1つでも壊れている場合は無条件で「00」を送ることにする。
- ▶ 両方生きている場合は「10」「11」「01」を送る

$L^* = 37$  (85点) (再掲)

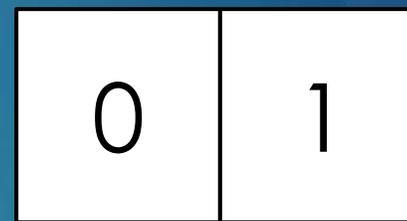
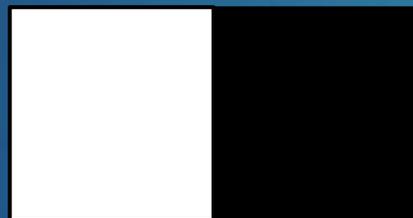
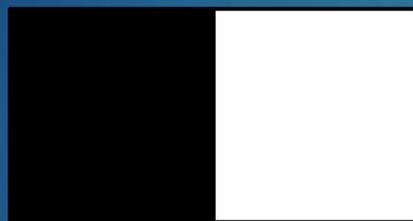
- ▶ 組の中で1つでも壊れている場合は無条件で「00」を送ることにする。

$L^* = 40$  (100点) (解法2)

- ▶ 2桁中片方生きているのにそれを潰すのは勿体ない

# $L^* = 40$ (100点) (解法2)

- ▶ もし「01」か「10」を送りたいタイミングで、丁度良く2桁のうち片方が壊れた組が来てくれると想定より多く情報を送ることができそう



# $L^* = 40$ (100点) (解法2)

- ▶ 最悪ケースでは片側のみが潰れた組が40組存在し、もしランダムにXが選ばれるならば確率1/3で都合のよい値に割り当たる。(「01」「10」「11」のうちどれか1つ)
  - ▶  $L^* = 40$ のとき、 $150 \div 2 - 40 = 35$ 個の0,1,2を送れ、さらにランダムな場合には上の通り $40 \div 3 \doteq 13$ 個の0,1,2を送れる
- => 0,1,2は38個あればXが表現できたし、余裕そう？

# $L^* = 40$ (100点) (解法2)

- ▶ 実際はそのままでは悪意のあるケースで落ちる (例えば $X = 3^{38} - 1$ とすると、全ての組に「11」が割り振られてしまい、片方が潰れた組は全く情報を送れず、終了)
- ▶ 対処法として、適当な正整数 $N$ をAnnaとBrunoの間で共有しておき、Annaは $X \wedge N$  ( $\wedge$ はxor)を送り、Brunoは受け取った値と $N$ でxorを取って答える、というものがあり、こうすることで $X$ はランダムとみなせるようになり、38桁以上送ることができそう。

# $L^* = 40$ (100点) (解法2)

- ▶ また、「2つとも桁が壊れている組」が3個以上存在すれば何も考えずにXを送ることができるので、悪意をもって作られたケースに対しても、桁の番号をシャッフルしておくことで(シャッフルの仕方はAnnaとBrunoで共有しておく)、壊れた箇所をランダムに配置できるとみなせる。
- ▶ 以上の乱択的な方針で、高確率で通すことができる。

# 得点分布

