delicacy

wzj52501

Peking University

2020 年 8 月 18 日

Results

$100pts : 141$ 人

$95pts : 18$ 人

$\geq 70pts : 202$ 人

$\geq 40pts : 315$ 人

$< 20pts : 24$ 人

给定一张 n 个节点 m 条边的有向图 $G=(V,E)$，要求求出一条以 1 号节点为起点的长度为 T 的回路，最大化回路包含的点权之和。另外有 k 个特殊条件：若某个点 x_i 在回路上到起点的距离恰好为 t_i，回路的权值会额外增加 y_i。

$n \le 50, m \le 500, w_i \le 5, T \le 10^9, k \le 200$

40%

设 $f(i,j)$ 表示小 W 时刻 i 在 j 号城市，已经获得的最多愉悦值之和。转移时考虑枚举下一步到达哪一个城市，并累加得分。

$$f(i,u_j)+c_{u_j}\rightarrow_{max} f(i+w_j,v_j)$$

时间复杂度为 $O(mT)$。

$k = 0$

我们首先可以将一条长度为 w_i 的边拆成 $w_i - 1$ 个中间节点的链，令中间节点的权值均为 0。那么改造后的新图所有边权均为 1，且最优解与原图相等。

$k = 0$

我们首先可以将一条长度为 w_i 的边拆成 $w_i - 1$ 个中间节点的链，令中间节点的权值均为 0。那么改造后的新图所有边权均为 1，且最优解与原图相等。接下来在新图中考虑倍增 dp，设 $f(i, j, k)$ 表示从 i 节点出发到 j 城市结束，经过 2^k 单位时间的路径中除最后一个 j 号节点经过的点权和的最大值。

$$f(x, y, 0) = -\infty$$

$$f(u_i, v_i, 0) = c_{u_i}$$

$$f(i, j, k) = \max_z \left(f(i, z, k-1) + f(z, j, k-1) \right)$$

$k = 0$

我们首先可以将一条长度为 w_i 的边拆成 $w_i - 1$ 个中间节点的链，令中间节点的权值均为 0。那么改造后的新图所有边权均为 1，且最优解与原图相等。接下来在新图中考虑倍增 dp，设 $f(i,j,k)$ 表示从 i 节点出发到 j 城市结束，经过 2^k 单位时间的路径中除最后一个 j 号节点经过的点权和的最大值。

$$f(x,y,0) = -\infty$$

$$f(u_i,v_i,0) = c_{u_i}$$

$$f(i,j,k) = \max_z \left(f(i,z,k-1) + f(z,j,k-1)\right)$$

最后对 T 进行二进制分解做一个简单的 dp 求出答案。

新图的节点数 $\leq m(w_i - 1) + n \leq 4m + n$，时间复杂度为 $O((4m+n)^3 \log T)$。

cont'd

首先按照 $k=0$ 的算法求出倍增 dp 数组。

接下来将 t_i 从小到大排序，设 $g(i,j)$ 表示小 W 时刻 t_i 在 j 号节点的最大得分，转移时按照 $t_{i+1}-t_i$ 二进制拆分根据 f 数组合并出答案。

时间复杂度为 $O((4m+n+k)(4m+n)^2\log T)$。

100%

考虑优化以上算法的拆边模型，改为拆点模型：将节点 x 拆分为 x_5, x_4, x_3, x_2, x_1，令 $c_{x_1} = c_x$，连接单向边 (x_i, x_{i-1})。对于每一条单向边 (u, v, w)，在新图中连接 (u_1, v_w, w)。

时间复杂度为 $O((5n + k)(5n)^2 \log T)$。

100%-2

仔细观察上述做法的倍增 dp 转移方程，如果重新定义 $a + b := max(a, b)$，$a * b := a + b$，那么 $f(i, j, k)$ 其实为某个矩阵 A 的 2^k 次幂，上述做法本质上是用矩阵快速幂的方法快速转移 dp。

所以只需要同时用矩阵加速转移 $f(i-1, j), f(i-2, j), \dots, f(i-W, j)$ 即可。

时间复杂度为 $O((5n+k)(5n)^2 \log T)$。

THX

Q & A