《机器》解题报告

题目大意

给定一张有向图 G（n 个点 m 条边），每个点有一个势能 h_x，有 p_x 个入管道，和 q_x 个出管道，每个入/出管道最多只能通过一个电子，若在图 G 中能从 x 经过若干条边到达 y，则一个电子可以从第 x 个点的第 i 根入管道进入，从第 y 个点的第 j 根管道通出，代价为 $h_x - h_y - a_{x,i} - b_{y,j}$。最大化总代价。

数据范围

$1 \le u_i, v_i \le n$

$0 \le m, p_i, q_i, a_{i,j}, b_{i,j}, h_i$

其中 $a_{i,j}, b_{i,j}, h_i$ 均在对应范围内等概率随机，其余均以某种方式随机生成，不会针对性卡 spfa 等算法。

本题共 25 个测试点，每个测试点 4 分。

测试点编号	$n \le$	$m \le$	$p_i, q_i \le$	$a_{i,j}, b_{i,j} \le$	$h_i \le$	特殊性质
1,2	50	200	10	10	30	
3,4	70	300	100	100	2000	
5,6,7,8	100	500	200	200	10^4	
9,10	2000	5000	500	10^4	10^6	A
11,12,13,14	2000	$n-1$	500	10^4	10^6	B
15,16,17,18	2000	10000	500	10^4	10^6	C
19,20,21	700	5000	1000	10^6	10^8	
22,23,24,25	2000	20000	2000	10^6	10^8	

特殊性质 A：$|u_i - v_i| = 1$

特殊性质 B：$m = n - 1, u_i < v_i, v_i = i + 1$

特殊性质 C：$\min\{u_i, v_i\} \le 4$

解题过程

算法一

按照题意建图跑费用流，期望得分 $8\sim16$ 分。

算法二

注意到对于每个点代价大的出/入边不会在代价小的出/入边之前被流满，所以可以将代价排序，然后先放代价小的边，做费用流时若该边满流再把代价大的边加进去。

这样可以加速费用流。期望得分 32 分。

算法三

对于特殊性质 A，发现可以把强连通分量缩点，然后变成了一个经典的老鼠进洞问题，可以采用 dp/维护凸包/线段树模拟费用流/用堆支持反悔操作等方法来做。这里不展开

期望得分 8 分。

算法四

对于特殊性质 B，可以用树剖/LCT 等方法模拟费用流，也可以维护凸包。

期望得分 16 分。

算法五

对于特殊性质 C，可以用堆维护前四个点的转移来模拟费用流。

期望得分 16 分。

算法六

考虑其线性规划形式：

$$\max\sum_i\Big(\sum_j\alpha_{i,j}-\sum_j\beta_{i,j}\Big)h_i-\sum_i\sum_j a_{i,j}\alpha_{i,j}-\sum_i\sum_j b_{i,j}\beta_{i,j}$$

$$\sum_j\alpha_{u,j}-\sum_j\beta_{u,j}+\sum_{(v,u)\in E}f_{v,u}-\sum_{(u,v)\in E}f_{u,v}=0(u\in V)$$

$$\alpha_{i,j} \le 1, \beta_{i,j} \le 1$$

$$\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, f_{u,v} \ge 0$$

对于每个 u 构造出无穷多个常量 $E_{i,j}, \hat{E}_{i,j} \le 0$

并令 $t_i = \sum_j \alpha_{i,j} - \sum_j \beta_{i,j}$

可将线性规划改写为:

$$\min -\sum_i t_i h_i + \sum_{i,j} \max(E_{i,j} + t_i, 0) + \sum_{i,j} \max(\hat{E}_{i,j} - t_i, 0)$$

$$t_u + \sum_{(v,u)\in E} f_{v,u} - \sum_{(u,v)\in E} f_{u,v} = 0 (u \in V)$$

$$f_{u,v} \ge 0$$

用约束代掉 max:

$$\min -\sum_i t_i h_i + \sum_{i,j} s_{i,j} + \sum_{i,j} \hat{s}_{i,j}$$

$$s_{i,j} - t_i \ge E_{i,j}$$

$$\hat{s}_{i,j} + t_i \ge \hat{E}_{i,j}$$

$$t_u + \sum_{(v,u)\in E} f_{v,u} - \sum_{(u,v)\in E} f_{u,v} = 0 (u \in V)$$

$$f_{u,v}, s_{i,j}, \hat{s}_{i,j} \ge 0$$

然后进行线性规划对偶:

$$\max \sum_{i,j} r_{i,j} E_{i,j} + \hat{r}_{i,j} \hat{E}_{i,j}$$

$$r_{i,j} \le 1$$

$$\hat{r}_{i,j} \le 1$$

$$-\sum_{i,j} r_{i,j} + \sum_{i,j} \hat{r}_{i,j} + e_i = -h_i$$

$$e_v - e_u \ge 0 ((u,v) \in E)$$

$$r_{i,j}, \hat{r}_{i,j} \ge 0$$

令 $z_i = -e_i$ 再整理一下：

$$\min - \sum_{i,j} r_{i,j}E_{i,j} - \hat{r}_{i,j}\hat{E}_{i,j}$$
$$0 \le r_{i,j} \le 1$$
$$0 \le \hat{r}_{i,j} \le 1$$
$$\sum_{i,j} \hat{r}_{i,j} - \sum_{i,j} r_{i,j} = z_i - h_i$$
$$z_u \le z_v((u,v) \in E)$$

然后用类似之前的方法，对于每个 i，当 $\sum_j \hat{r}_{i,j} - \sum_j r_{i,j}$ 确定的时候构造一个函数把它的最优值算出来，设这个函数为 G_i。那么改写之前的线性规划：

$$\min \sum_i G_i(z_i - h_i)$$
$$z_u \le z_v((u,v) \in E)$$

重新观察这个式子，发现是一个类似保序回归的问题。

注意到 G_i 是一个 0 点为最小值的凸函数，且在对于任意整数 t，在区间 $(t, t+1)$ 中均为一次函数。

所以容易证明一定存在一组最优解 z 使得所有成员都是整数。

定义 1：z 向 $\{a,b\}(a \le b)$ 取整，表示将 z 中的元素大于 b 的变成 b，小于 a 的变成 a
定义 2：集合 U 的均值区间：满足 $\sum_{i \in U} G_i(k - h_i)$ 最小的 k 的取值区间（通过导数易证该范围一定是一段区间）
引理 1：对于 $a < b$，任意 $h_i \notin (a,b)$，若 z^S 为原问题加入条件 $z_i^S \in \{a,b\}$ 后的一组最优解，则一定存在一组最优解 z 使得其向 $\{a,b\}$ 取整后为 z^S
proof. 反证法，不妨假设原问题的最优解 z' 必有 $z_i' \le a$ 且 $z^S = b$
设 $x = \{z_i' | z_i' \le a, z_i^S = b\}, U = \{i | z_i' = x, z_i^S = b\}$。

若 $l > a$，将 U 中 z_i' 改成 $\min(l,b)$ 后不劣。

若 $l \le a, r \ge b$，将 U 中 z_i' 改成 b 后不劣。

若 $l \le a, r < a$，将 U 中 z_i^S 改成 a 不劣。

若 $l \le a, r < b$：

若 $U=\{i|z'_i\le a, z_i^S=b\{$，全部改成 a 不劣。

否则设 $y=max\{z'_i|z'_i<x, z_i^S=b\}, U'=\{i|z'_i=y, z_i^S=b\{$，其均值区间为 $[l', r']$

若 $r'\le x$，将 $f_i^S(i\in U\cup U')$ 改成 a 不劣。

若 $r'>x$，则将 $z'_i(i\in U')$ 改成 x 不劣。
重复上述过程即可找到矛盾。

根据引理 1，我们可以用类似整体二分的方法（详见参考文献 [1]4.5 节）将其转化为一般图最大带权独立集问题，可以采用 dinic/ISAP 等最大流算法解决。

复杂度 $O(maxflow(|V|,|E|)\lg h_i)$ 期望得分 100 分。

其他思考一

或许使用 cost scaling 等高级费用流算法可以拿更多分。

其他思考二

或许存在使用模拟退火等随机算法的高效方法。

其他思考三

线性规划对偶之后针对特殊数据可以进行模拟，或许有更高效的方法。

其他思考四

是否存在更一般的费用流模型能通过类似方法转化?

参考资料

[1] 高睿泉，《浅谈保序回归问题》，2018 年集训队论文

[2] 丁晓漫，《再探线性规划对偶在信息学竞赛中的应用》，2021 年集训队论文

[3] 董克凡，《浅谈线性规划与对偶问题》，2016 年集训队论文