

IOI2022 中国国家集训队选拔互测命题 细菌 解题报告

题目大意

有一个 $n \times m \times k$ 的长方体培养皿，初始时每个小格均有 1 个细菌。接下来每秒钟，每个细菌会分裂出 6 个新细菌，分别分布在与当前位置曼哈顿距离为 1 的六个格子（如果对应格子不存在则该细菌当场死亡），同时原细菌死亡。试问 d 秒后格子 (a, b, c) 的细菌数。答案对 998244353 取模。

数据范围

对于全部数据， $1 \leq d, n, m, k \leq 1.2 \times 10^5, 1 \leq a \leq n, 1 \leq b \leq m, 1 \leq c \leq k$ 。

本题设有若干个子任务。对于每个子任务，你必须通过其中的全部测试点来获得这个子任务的分数。

- **子任务 1 (5 分)** : $d, n, m, k \leq 50$ 。
- **子任务 2 (10 分)** : $d, n, m, k \leq 5 \times 10^3$ 。依赖子任务 1。
- **子任务 3 (15 分)** : $m = k = 1$ 。
- **子任务 4 (10 分)** : $k = 1, n, m \geq d$ 。
- **子任务 5 (15 分)** : $k = 1, n, m \geq \frac{d}{10}$ 。依赖子任务 4。
- **子任务 6 (35 分)** : $k = 1$ 。依赖子任务 3、4、5、6。
- **子任务 7 (10 分)** : 无特殊限制。依赖子任务 1、2、3、4、5、6。

解题过程

算法一

设 $F(t, i, j, k)$ 表示 t 秒时格子 (i, j, k) 的细菌数量，递推计算。时间复杂度 $O(dnmk)$ ，期望得分 5 分。

算法二

我们倒着考虑这个问题，不难发现这等价于计算从格子 (a, b, c) 出发走 d 步，不超过大长方体的边界的方案数。

可以发现在三个维度上这个问题是独立的。不妨令 $F_{x,y,i}$ 表示从原点开始在一条数轴上走，每步需要往左或右走一步，只能访问数轴上 $[-x, y]$ 的区间的路径数。如果我们能对给定的 x, y 快速计算 $F_{x,y,0 \sim d}$ ，那么只需要算出 $F_{a-1, n-a, 0 \sim d}$ 等三个数组，用 NTT 卷在一起即可。

这样，我们便得到了一个简单的 $O((n + m + k)d)$ DP 做法：暴力对所有的 $x + y = n - 1$ ，计算 $F_{x,y,i} (0 \leq i \leq d)$ 。可以通过子任务 2。

算法三

我们已经把问题转化为了一个经典的容斥原理模型。考虑在平面直角坐标系上从原点出发，往左一步记为向上，往右一步记为向右，那么计算 $F_{s,t,i}$ ，相当于计算从原点开始的只能向上、向右的，长度为 i 的路径数，使得路径上每一点均在直线 $y - x = s$ 和 $x - y = t$ 之间。

方便起见，我们令 $G_{s,t,u,v}$ 表示从原点开始的只能向上、向右的，在 (u, v) 结束的路径数，使得路径上每一点均在直线 $y - x = s$ 和 $x - y = t$ 之间。计算 G 可以通过容斥原理，在 $O(\frac{u+v}{s+t})$ 的复杂度内解决（此方法又称路径翻折法），具体过程此处略去。

我们发现，在确定了前 $i - 1$ 步的走法后，第 i 步大部分情况下可选择两种走法，仅有边界情况下可能少于两种。我们在计算 $F_{s,t,i}$ 的时候，可以先求出 $2 \times F_{s,t,i-1}$ ，再减去边界的情况（仅有 $O(1)$ 种），即可求出答案。

可以发现，这种算法时间复杂度为 $O(\frac{d^2}{n})$ 。结合上面 $O(nd)$ 的算法，我们采取根号分治的策略， $n < \sqrt{d}$ 时使用后者， $n \geq \sqrt{d}$ 时使用前者，即可做到 $O(d\sqrt{d})$ 复杂度，可以通过此题。

到子任务 6 的部分分都留给不会 NTT 的选手。

算法四

有基于生成函数理论的 $O(d \log d)$ 的做法，有兴趣的选手可以自行探索。

参考资料

无。