djq 学生物 解题报告

题意

初始有 n 个排列 (1)。

每次以固定分布随机选出 n 个排列的组合，并将 n 个排列复合上选出的排列。

每次还有一个固定概率 p 结束。

求结束时 6^n 种局面的概率。

数据范围

对于全部数据，$1 \le n \le 8$。

Subtask 1（10pts）：$n = 1$。

Subtask 2（20pts）：$n \le 3$。

Subtask 3（15pts）：排列只包含 $(1),(123),(132)$。

Subtask 4（20pts）：$n \le 4$。

Subtask 5（35pts）：$n \le 8$。

解题过程

算法一

通过较为精细的手玩可以发现当 $n = 1$ 时的计算过程。可以通过第一个测试点。

算法二

定义运算符 $a \oplus b$ 表示把 a 对应的 n 个排列分别复合上 b 对应的排列。

设 k_i 表示选中排列组 i 的概率，f_i 表示局面 i 期望被经过几次，则答案就是 pf_i。

可以列出方程
$f_i = \sum_{j \oplus t = i} f_j k_t + [i = 1]$

使用高斯消元即可求出所有结果。时间复杂度 $O(216^n)$ 或 $O(T^3)(T = 6^n)$，可以通过前两个测试点。

算法三

定义卷积 $H = FG$，满足
$h_t = \sum_{i \oplus j = t} f_i g_j$

则 $F = FK + I$，因此 $F = \frac{I}{1-K}$。

对于特殊性质，我们发现排列只会变成 $(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$，且三种排列可以用 $0,1,2$ 表示，复合关系和模 3 意义下的加法相同。

即此时一组排列复合等价于三进制数不进位加法，卷积等价于三进制异或卷积。

此时可以使用高维 DFT 求出点值形式，求逆后逆 DFT 即可。

复杂度 $O(n3^n)$ (不计输入复杂度)，可以通过测试点 3。

算法四

考虑排列复合构成了群 S_3，特殊性质即为只考虑 S_3 的一个子群 $\{(1),(123),(132)\}$，那么我们考虑对 S_3 找出类似点值的构造。

由于没有交换律，考虑构造点值形式为一个三元组 (A,B,C)，其中 A 是一个 2×2 的矩阵， B,C 均为 1×1 的矩阵。

一种可行的构造如下：

$$(1):\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},[1],[1]\right)$$
$$(23):\left(\begin{bmatrix}1&-1\\0&-1\end{bmatrix},[1],[-1]\right)$$
$$(12):\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},[1],[-1]\right)$$
$$(123):\left(\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix},[1],[1]\right)$$
$$(132):\left(\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix},[1],[1]\right)$$
$$(13):\left(\begin{bmatrix}-1&0\\-1&1\end{bmatrix},[1],[-1]\right)$$

当然也可以使用单位根或几何意义得到其他构造。

每次考虑最高维，可以做线性变换后变为 6 个维数减一的问题递归，这部分复杂度为 $O(n6^n)$ 或 $O(T\log T)$。

如此一来，我们就可以将原系数转化为 3^n 个大小不一的矩阵。那么卷积只需做矩阵乘法，求逆只需要对每个矩阵求逆即可。

假设对边长为 n 的矩阵做乘法的复杂度为 $O(n^w)$。

显然边长为 2^i 的矩阵一共有 $\binom{n}{i}2^{n-i}$ 个。

那么复杂度即为 $O(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^{n-i}2^{iw})=O\left((2^w+2)^n\right)$。

若 $w=3$，复杂度即为 $O(10^n)$ 或 $O(T^{1.29})$。

若 $w=2.373$，复杂度即为 $O(7.19^n)$ 或 $O(T^{1.101})$。

实际上这个点值的构造可以推广到更多的群，具体理论可以查看群表示论相关资料。

参考资料

[1] Yurii I. Lyubich. Introduction to the Theory of Banach Representations of Groups [M], 1988