

《海胆》解题报告

长沙市雅礼中学 罗恺

1 题目大意

定义一个图为海胆，如果它满足以下条件：

1. 包含恰好一个简单环
2. 除了环上的点以外每个点度数都不超过 2
3. 是一个联通图

有一张图，有 n 个点， n 条边，第 i 条边连接 u_i 和 v_i (不保证联通)。

定义一张图的区间子图 $[l, r]$ 为 (V', E') , $E' = \{(u_i, v_i) | l \leq i \leq r\}$, $V' = \{u_i | l \leq i \leq r\} \cup \{v_i | l \leq i \leq r\}$ ，也就是说，这个区间子图包含且仅包含区间中的边和所有在区间中一条边上的点。

现在有 q 次询问，每次给定一个区间 l, r ，求 l, r 有多少个子区间 $[l', r']$ ($l \leq l' \leq r' \leq r$) 满足原图的 $[l', r']$ 区间子图是个海胆。

2 数据范围

子任务编号	$n \leq$	$q \leq$	特殊性质	分值
1	100	100	无	5
2	500	500		15
3	5000	5000		
4	50000	50000		
5	10^6	1	原图是一个海胆	20
6		10^6	无	
7				

时间限制：7s

空间限制：1024MB

3 题目解法

3.1 算法 1

对于每个询问，枚举子区间并建出区间子图判断答案。
时间复杂度 $O(n^3q)$ ，可以通过子任务 1，期望得分 5 分。

3.2 算法 2

预处理出每个区间子图是否是海胆。
时间复杂度 $O(n^3 + n^2q)$ ，如果多处理个前缀和复杂度为 $O(n^3 + q)$ ，期望得分 20 分。

3.3 算法 3

考虑预处理的过程，可以枚举左端点然后每次移动右端点来加边判断是否合法。
注意到海胆的要求：只有一个简单环，然后不能有环外点度数超过 2，然后要联通。
第一条可以用并查集维护有没有环，有没有出现第二个环；第三条也可以用并查集维护。
第二条可以在找到第一个环之后确定哪些点是环外点，这样就可以方便维护。
时间复杂度 $O(n^2\alpha(n) + q)$ ，期望得分 35 分。

3.4 算法 4

考虑原图是一张海胆的情况。也就是说只有一个环，且环外没有度超过 2 的点。
首先合法的区间一定包含这个环，然后只需要保证图联通即可。
设这个环的最小边编号是 l ，最大是 r 。
由于原图删掉某一条环边之后就是棵树了，我们只需要判断子图的点数-1=边数-1也就是点数-边数=0 即可。
我们求的是区间子图合法的个数，所以可以左端点从 l 到 0 扫描线，然后支持给 r 到 n 中某个后缀加减，然后记录版本，询问一个前缀内所有版本中 0 的个数。
考虑线段树：前一个操作可以直接打区间加标记，后一个操作的话，由于任何时候最小值不小于 0，所以我们记录版本的时候只需要在最小值 =0 的情况下打一个最小值的位置全部 +1 的标记即可。
时间复杂度 $O((n + q) \log n)$ ，期望得分 15，结合算法 3 期望得分 45。

3.5 算法 5

对于 $q = 1$ 的情况，我们可以认为是求整个序列有多少子区间是海胆。

我们先固定左端点。由于要满足前两个性质，我们知道右端点必须要在第一次出环的边之后，在第二次出环的边和使得第一次出现环外点度数超过 2 的边之前。

第一次出环的边可以左端点从 n 到 1 扫，然后使用动态树 (link-cut tree): 每次加边如果联通就删最大边并且更新第一次出环的边，第二次出环的边可以一起更新。

然后结合第一次出现环外点度数超过 2 的边这一部分，我们需要移动左端点的时候用双指针移动右端点，这时我们可以记一下当前每个点的度数，和有多少个度数超过 2 的点，这部分修改是单点修改。

当然要求的是环外点不能有，也就是总共的-环上点 $= 0$ 。所以环上点可以用 lct 维护链和。

那么我们就知道了对于一个左端点 l ，右端点满足前两个性质 r 需要在的区间 r_1, r_2 。

然后就只剩下第三条要求了，类似算法 4，由于右端点在这一段里肯定满足恰好一个环外边，所以联通的条件就是点-边 $= 0$ 。

所以可以使用区间加，然后查询区间最小值和个数，如果最小值是 0 就累加进答案。

时间复杂度 $O(n \log n)$ ，期望得分 15。

3.6 算法 6

算法 5 的线段树也可以使用算法 4 的方法维护，后一个标记也可以只在区间里打。

时间复杂度 $O((n + q) \log n)$ ，期望得分 100。

参考文献

- [1] 黄志翱, 浅谈动态树的相关问题及简单拓展, 2014 年国家集训队论文
- [2] 吉如一, 区间最值操作与历史最值问题, 2016 年国家集训队论文