

生活在对角线下 命题报告

丁晓漫

2021.9

1 试题来源

本题改编自 [AGC 019F Yes or No](#)，笔者从原题的一个不同于官方题解的做法出发进行了适当的拓展，得到了本题。

2 题目大意

给定一个 $p \times q$ 次的二元多项式 $F(x, y)$ ，求

$$\sum_{x=0}^n \sum_{y=0}^{\min(x, m)} \binom{x+y}{x} \binom{n-x+m-y}{n-x} F(x, y)$$

对 998244353 取模的结果。

每个测试点有 T 组询问，保证所有询问中 $m - n$ 的值是一个常数 c 。

3 数据范围

为了方便，以下记 $L = \max(N, N + c)$ ，即询问中坐标的范围。

对于所有测试数据： $1 \leq T \leq 10^5, -10^5 \leq c \leq 10^5, 1 \leq L \leq 10^5, 0 \leq (p+1) \times (q+1) \leq 10$ 。保证输入的多项式的系数属于 $[0, 998244353)$ 。

subtask 1 (1 pts): $T = 1, L \leq 10^3$

subtask 2 (9 pts): $L \leq 10^3$

subtask 3 (20 pts): $T = 1, p = q = 0$

subtask 4 (20 pts): $p = q = 0$

subtask 5 (20 pts): $T = 1$

subtask 6 (10 pts): $c = 0$

subtask 7 (20 pts): 没有特殊限制。

4 解题过程

为了方便分析，以下记 $d = (p + 1) \times (q + 1)$ 。

做法 1.1

观察式子的组合意义，即对于每条从 $(0, 0)$ 到 (n, m) 且只能向右和向上的路径，对于路径上 $y \leq x$ 的点的 $F(x, y)$ 求和。

那么不难设计出 dp: $dp(n, m)$ 表示所求答案，考虑路径上一步可以得到转移式: $dp(n, m) = dp(n - 1, m) + dp(n, m - 1) + [m \leq n] \binom{n+m}{n} F(n, m)$ 。时间复杂度 $O(TL^2)$ ，可以通过 subtask 1。

做法 1.2

注意到题目保证 $d \leq 10$ ，那么枚举所有 $0 \leq u \leq p, 0 \leq v \leq q$ 并预处理 $F(x, y) = x^u y^v$ 时的答案，就可以利用这些信息快速回答询问。时间复杂度 $O(d(L^2 + T))$ ，可以通过 subtask 2。

做法 2.1

接下来考虑 $T = 1, p = q = 0$ 的情况（即 AGC 019F 的情况），实质上是计算每条从 $(0, 0)$ 到 (n, m) 的最短路径上 $y \leq x$ 的点的个数之和。

一个显然却重要的观察: 当 $n = m$ 时, 所有路径中 $y < x$ 和 $y > x$ 的点是完全对称的。也就是说, 把所有路径上经过的所有点分成三类求和, A 为所有 $y < x$ 的点的个数, B 为所有 $y = x$ 的点的个数, C 为所有 $y > x$ 的点

的个数。需要的是 $A+B$ 的值，而我们已知 $A+B+C = \binom{n+m}{n}(n+m+1)$ 且 $A=C$ ，只需要求得 B 的值即可，而又有 $B = \sum_{i=0}^n \binom{i+i}{i} \binom{n-i+m-i}{n-i}$ ，所以可以轻松求得 $A+B$ 的值。

那么对于 $n \neq m$ 的情况，上述讨论启发我们枚举路径最后一次和对角线相交的位置 (i, i) ，那么从 $(0, 0)$ 走到 (i, i) 的部分通过上述讨论已经解决；对于 (i, i) 到 (n, m) 的部分，由于这一部分和对角线没有相交，那么如果 $n > m$ 则所有点都满足 $y < x$ ，否则所有点都满足 $y > x$ ，故只需要计算 (i, i) 走到 (n, m) 且不与对角线相交的方案数（两个组合数相减¹），即可计算出答案。

注意做法中需要对每一个 i 求出 B 的大小，即需要求出 $b_i = \sum_{j=0}^i \binom{j+j}{j} \binom{i-j+i-j}{i-j}$ ，需要通过一次卷积得到，故时间复杂度为 $O(T(L \log_2 L))$ ，可以通过 subtask 3。

做法 2.2

在通过卷积计算出所有 b_i 后，写出当 $n > m$ 时计算答案的式子（ $n < m$ 时类似）：

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{2} \left(\binom{i+i}{i} (n+m+1) + b_i \right) \binom{n-i+m-i}{n-i} + \binom{i+i}{i} \left(\binom{n-(i+1)+m-i}{n-(i+1)} - \binom{n-i+m-(i+1)}{n-i} \right)$$

由于题目中保证 $m-n$ 为常数 c ，观察发现式子中每一项都是 $A(i) \times B(n-i)$ 的形式，可以通过两次卷积预处理出所有 (n, m) 的答案，时间复

¹经典结论，利用翻折容斥得到，在此不做赘述

杂度为 $O(L \log_2 L + T)$ ，可以通过 subtask 4。

做法 3

接下来的问题是当 $p, q > 0$ 时，如果套用上述做法，发现首先 $xy^2 \neq x^2y$ ，也就是说 $A \neq C$ ；其次无法快速求出 $A + B + C$ 的值，所以需要先做出一些变换。

看到 $\binom{x+y}{x} \binom{n-x+m-y}{n-x}$ ，可以尝试配出 $x^u y^v$ 进行变形，即

$$\begin{aligned} & \binom{x+y}{x} \binom{n-x+m-y}{n-x} F(x, y) \\ &= \binom{x+y}{x} \binom{n-x+m-y}{n-x} \sum_{u=0}^p \sum_{v=0}^q a_{u,v} x^u y^v \\ &= \sum_{u=0}^p \sum_{v=0}^q a_{u,v} \binom{x-u+y-v}{x-u} \binom{n-x+m-y}{n-x} (x+y)^{u+v} \end{aligned}$$

发现，枚举了 u 和 v 之后，点 (x, y) 的贡献函数是 $(x+y)^{u+v}$ ，既满足 $A = C$ ，又能允许我们快速计算出 $A + B + C$ 的值，因为从 $(0, 0)$ 到 (n, m) 无论选择哪条路径， $x+y$ 的值一定为 $0, 1, \dots, n+m$ ；而前面的组合数相当于把起点从 $(0, 0)$ 挪到了 (u, v) 。

然而，直接把问题变成从 $(0, 0)$ 走到 $(n-u, m-v)$ ，从而套用做法 2 来解决是不行的，因为转化中令 $x' = x-u, y' = y-v$ ，所以此时的限制是 $y \leq x$ 即 $y' \leq x' + u - v$ 而不是 $y' \leq x'$ ，即主对角线发生了偏移，也就失去了 $A = C$ 的性质。

解决方式也并不困难，只需要在第一步变换时配出 $(n-x)^u (m-y)^v$ 即可直接把终点移至 $(n-u, m-v)$ 而不改变 $y \leq x$ ，接下来套用做法 2 即可。

还有一个问题是如何较高效的把 $F(x, y)$ 变成 $\sum_{u=0}^p \sum_{v=0}^q a_{u,v} (n-x)^u (m-y)^v$

$y)^v$ 的形式。暴力从高位向低位确定系数是 $O(p^2q^2)$ 的，而先转化成 $x^u(m - y)^v$ 再转化 x 可以做到 $O((p + q)d)$ 。

时间复杂度 $O(dL \log_2 L + Td(p + q))$ ，可以通过所有测试点。

5 选题理由

本题考察了选手在组合意义、容斥、多项式卷积等多个方面的综合计数能力。

在部分分设置方面，循序渐进，利用特殊性质一步一步引导选手走向正确的解法。最简单的暴力只能得到 1 分或者 10 分，而得到关键的对称性结论结合多项式卷积可以得到 30 分或 50 分，最后进行正确的变形且在代码中仔细处理计算的细节才可以获得 100 分，具有较高的区分度。

总体来说，本题难度始终，全面地考察了选手的算法能力和代码能力。