Range Minimum Element 解题报告

华东师范大学第二附属中学 郭羽冲

1 题目内容

1.1 题意简述

有一个长度为 n，值域为 $[1, c]$ 的正整数序列 a。给定 m 个区间 $[l_i, r_i]$，设长度为 m 的序列 b 满足 $\forall i \in [1, m], b_i = \min\limits_{j=l_i}^{r_i}\{a_j\}$。求出 a 在范围内任意取的情况下共能得到多少种不同的 b。答案对 998244353 取模。

1.2 数据范围

对于所有数据，$1 \le n \le 100, 1 \le m \le \frac{n(n+1)}{2}, 1 \le c < 998244353, \forall i \in [1, m], 1 \le l_i \le r_i \le n$。保证给定的 m 个区间两两不同。

Subtask 1 (5 pts)：$n, c \le 5$。

Subtask 2 (10 pts)：$c \le 100$，且对于任意两个有交点的区间一定存在其中一个包含另一个。

Subtask 3 (15 pts)：$m \le 18, c = 2$。

Subtask 4 (20 pts)：$c = 2$。

Subtask 5 (15 pts)：$n, c \le 40$。

Subtask 6 (15 pts)：$c \le 100$。

Subtask 7 (20 pts)：无特殊限制。

1.3 题目来源

本题是一道原创题。

2 题目解法

设 $f(a)$ 表示 a 所对应的 b。

2.1 Subtask 1

直接 $O(c^n)$ 暴力枚举所有可能的 a，计算出其对应的 b，然后使用哈希对所有 b 进行去重，同时统计答案。

时间复杂度 $O(n^2c^n)$。

2.2 Subtask 2

对于每个 $[l_i, r_i]$ 考虑所有包含它的区间，显然这些区间两两之间都是包含关系。如果它被至少一个区间包含那么就找到其中长度最小的区间（显然这是唯一的），设为 $[l_j.r_j]$，并从 i 向 j 连一条边。这样可以得到一个内向森林。

对 b_u 的限制有两种情况：

- 如果 u 的所有儿子 v 所对应的 $[l_v, r_v]$ 的并恰好为 $[l_u, r_u]$，那么 $b_u = \min\limits_{v \in son_u} b_v$。
- 否则 b_u 可以取到任意不超过 $\min\limits_{v \in son_u} b_v$ 的值。

  使用树形动态规划计算即可。

  时间复杂度 $O(n^3)$。

2.3 Subtask 3

称 b 合法当且仅当 $\exists a$ 满足 $f(a) = b$。暴力枚举 b，并判断当前这个 b 是否合法。

对于所有 i 满足 $b_i = 2$，我们要求 $a_{l_i \dots r_i}$ 中的所有数都是 2，因此我们可以在这些位置上全部填上 2。而剩下的位置可以全部填上 1，显然这是不劣的。

只需要判断是否存在一个 i 满足 $b_i = 1$，并且 $[l_i, r_i]$ 中的数全部是 2。如果存在这样的 i 就说明当前这个 b 不合法，否则合法。

时间复杂度 $O((n + m)2^m)$。

2.4 Subtask 4

沿用 Subtask 3 的解法中判断 b 是否合法的方法，称它为过程 1。设 $g(b)$ 表示 b 通过过程 1 所生成的 a。

结论：$\forall b_1, b_2$ 满足 $b_1 \neq b_2$ 且 b_1, b_2 合法，有 $g(b_1) \neq g(b_2)$。

证明：假设 $\exists b_1, b_2$ 满足 $b_1 \neq b_2$ 且 b_1, b_2 合法，且 $g(b_1) = g(b_2)$。因为 b_1, b_2 合法，所以 $f(g(b_1)) = b_1, f(g(b_2)) = b_2$。如果 $g(b_1) = g(b_2)$ 那么 $b_1 = b_2$，矛盾。因此结论得证。

因此我们只需要计算 b 任意取的情况下能得到多少种不同的 $g(b)$。注意这里不要求 b 合法。

考虑什么样的 a 可能被过程 1 生成。

对于 a 中一段极长的连续的填 2 的位置，设为 $[l,r]$，那么我们要求所有被 $[l,r]$ 包含的区间的并集恰好为 $[l,r]$。否则过程 1 一定不会生成这个 a。

对于每个 $[l,r]$ 预处理出它是否满足这个条件，然后动态规划计算答案即可。

具体来说，设 dp_i 表示只考虑前 i 个数的方案数。

枚举一个 j 满足 $(j,i]$ 合法，有 $dp_i \leftarrow dp_j$。

答案即为 dp_n。

时间复杂度 $O(n^2)$。

2.5 Subtask 5,6

沿用 Subtask 3,4 的思想。但由于 c 不再为 2，我们需要一个更加一般化的判断过程。

从小到大枚举每个 x，考虑它填进 a 中的情况。

对于当前的 x，我们考虑所有 i 满足 $b_i > x$。显然 $[l_i,r_i]$ 中一定不能填 $\le x$ 的数。我们可以把不在这些区间内且还没有填的位置全部填上 x。

称上述过程为过程 2。设 $h(b)$ 表示 b 通过过程 2 所生成的 a。

可以类似地应用 Subtask 4 中的结论，因此我们只需要计算 b 任意取的情况下能得到多少种不同的 $h(b)$。

考虑如何填上 x 才能使得 a 可能被过程 2 生成。

与 Subtask 4 中得到的性质类似，对于 a 中一段极长的连续的**不填** x 的位置，设为 $[l,r]$，那么我们要求所有被 $[l,r]$ 包含的区间的并集恰好为 $[l,r]$。否则过程 2 一定不会生成这个 a。

设 $dp_{l,r,x}$ 表示考虑 $[l,r]$ 这段区间，其中只填 $[x,c]$ 中的数的方案数。

枚举一个 i 表示 $[l,r]$ 中第一个 x 填的位置，满足 $[l,i)$ 合法，有 $dp_{l,r,x} \leftarrow dp_{l,i-1,x+1} \times dp_{i+1,r,x}$。

答案即为 $dp_{1,n,1}$。

时间复杂度 $O(n^3c)$。

2.6 Subtask 7

c 的范围较大，我们不能将 c 计入状态。

可以发现，答案一定是一个关于 c 的 n 次多项式，因此我们只需要计算 $c \in [0,n]$ 的答案。

对状态定义稍作改变：$dp_{l,r,x}$ 表示考虑 $[l,r]$ 这段区间，其中只填 $[1,x]$ 中的数的答案。

转移式变为 $dp_{l,r,x} \leftarrow dp_{l,i-1,x-1} \times dp_{i+1,r,x}$。

$dp_{1,n,i}$ 即为 $c = i$ 时的答案。最后可以使用拉格朗日插值计算答案。

时间复杂度 $O(n^4)$。

3 参考资料

与万成章、王又嘉、高麟翔同学的讨论。