题意

两个人在一个序列上博弈 每次每个人可以选最左边或者最右边的数并拿进自己的可重集合 最后每个人的得分定义为可重集合内所有元素的异或和 问在两个人都采用最优策略的情况下谁会获胜

数据范围

多测 $T \le 40 \quad n \le 50000 \;\; a_i \le 2^{31}-1$

题解

考虑所有 a_i 的异或和中最高的非零位（如果异或和为 0 显然是平局）。显然胜利等价于在这一位中拿到奇数个 1，这样我们就把所有的 a_i 变成了 0 或者 1。

$O(n^2)$ 暴力：$dp(l,r,0/1)$ 表示 $[l,r]$ 区间在先手初始拿到了 $0/1$ 时的胜负情况，容易做到 $O(1)$ 转移。

现在，我们推一些性质：

结论 1 如果序列长度为偶数，那么先手胜利。

证明 先手总能拿到所有奇数位置，或者拿到所有偶数位置，其中恰有一个有奇数个 1。

现在我们分析序列长度为奇数的情况。如果两端都是 0，那么根据结论 1，先手必败。

剩下的情况看起来不是很好做了，但是可以猜！如果 n 比较小用 n^2 暴力，剩下情况直接输出 First 就过了数据随机的点。

现在，经过合理的爆搜和找规律我们可以发现以下结论：

结论 2 一个长度为偶数的含有偶数个 1 的序列，先手必败当且仅当这个序列中 1 的个数是 4 的倍数，并且它能写成 STS' 的形式，其中 S,S' 互为反串，T 中第 $2i-1$ 位和第 $2i$ 位相同（显然 T 的长度是偶数，这里定义最开始的位是第 1 位）。

证明 这样的串后手必胜，因为如果先手选 S 中的一位，后手就选 S' 中对应一位，反之亦然；这样一定在某个时刻中间只剩下 T，后手选和先手前一步选的相邻的一位。这个策略下后手恰好选了一半的 1，也就是偶数个。

对于其他的情况，类似结论 1 的证明，只要任何先手即将操作的时刻序列中剩下奇数个 1 先手就必胜了；这样我们可以假设每一步结束后序列中都剩下偶数个 1，也就是后手拿走的数肯定和先手同一步拿走的一样。到这里立刻推出两人最终拿的 1 数量相同，这样串中 1 的个数是 4 的倍数。

现在我们可以证明更强的结论：任何不能表示成 STS' 的串（定义同前面，并且称为坏串）先手能保证拿走偶数个 1，也能保证拿走奇数个 1。（当然这两者不是同时的）

证明可以使用归纳法，长度不超过 4 的情况容易验证。我们只用证明如下引理：

引理 任何一个不是坏串的串要么去掉开头的两位不是坏串，要么去掉结尾两位不是坏串。

引证 反证。开头两位不同或者结尾两位不同的串显然可以（考虑奇偶性）。现在假设开头两位相同，结尾两位相同，并且开头的串能对应的最长的 T 的长度不小于结尾的串所对应的。现在考虑去掉开头两位为坏串，因此这个串为 $xxSTS'$ 的形式（$x \in \{0,1\}$）。注意到我们可以假设 T 左侧，右侧分别为 10 和 01（注意到 01 在这里已经是对称的，并且如果两端两位相同的话可以增长 T），那么去掉结尾后，左侧的 1 和右侧的 0 处于对称位置，但是他们不同，只能在去掉结尾的 T 里面，这就导致去掉结尾的 T 的长度严格更大，矛盾。

这样不妨假设是开头的两位，那么后手要么拿和先手对称的位置，这样显然不会变为坏串，或者拿开头的两个，这样也不是坏串。

有了结论 2 很好枚举先手的第一步进行判定，时间复杂度 $O(n)$。

参考资料

无

感谢南京外国语学校程思元 魏佳泽 汤智铖同学验题

感谢程思元同学帮我审核题解