

>.< 解题报告

安徽师范大学附属中学 朱剑枫

2022.10.24

题目大意

有一张 n 个点, m 条边的带权有向图, 再给定 k 条路径, 求一条 1 到 n 的最短路径 (不要求是简单路径), 使得这条路径不包含给定 k 条路径中的任何一条。输出此路径的长度, 如果找不到输出 -1 。

数据范围

以下的路径长度均指一条路径经过的点的个数 (重复点算多次)。

Subtask1(20 pts): $n, m \leq 100, k = 0$;

Subtask2(20 pts): $n, m \leq 100$, 每条给定路径长度不超过 4;

Subtask3(30 pts): $n, m \leq 2 \times 10^5, k = 1$;

Subtask4(30 pts): $n, m, k \leq 2 \times 10^5$ 。

对于所有数据, 有 $1 \leq n, m \leq 2 \times 10^5, 0 \leq k \leq 2 \times 10^5, 1 \leq u_i, v_i \leq n, 0 \leq w_i \leq 10^9$, 路径长度总和小于等于 2×10^5 。

解题过程

算法一

由于 $k = 0$, 所以对于要求的最短路没有任何性质, 直接求 1 到 n 的最短路即可。
期望得分: 20。

算法二

由于限制的路径长度不超过 4, 所以到每个点时, 可以只记录它的前两个点, 之后再枚举走哪一条出边, 这样一条路径上所有长度小于等于四的子路径都可以被判断到是否合法。

所以记 $d_{i,j,k}$ 表示从 1 走到 i , i 在路径上的前两个点分别是 j, k 的最短距离, 转移可以直接枚举出边并判断合法性。

用类似最短路的方法解决，时间复杂度 $\Theta(n^2 m \log m)$ 。期望得分：40。

算法三

由于只有一条路径被禁止，如果这条路径不在原图中 1 到 n 的最短路径上，那么可以直接输出 1 到 n 的最短路径长度。

否则这条路径一定是最短路径上的子路径，由最短路的无环性，给定的路径上一定不会出现重复的点。那么对于任意一条路径的最后一个点 x ，如果 x 再向后走可能会导致走出的路径包含给定路径且给定路径包含 x ，就相当于 x 确定了给定路径在目前走出路径上的位置。目前走出的路径上的一个后缀一定和给定路径到 x 的这个前缀相同，且向后走要在包含当前 x 的情况下包含给定路径，那么向后走的方法也是唯一的。

所以可以设 $d_{i,0/1}$ 表示 1 走到第 i 个点，当前走出的路径的某个后缀是/否能匹配给定路径到 i 为止的前缀的最小距离。也可以直接用最短路解决。

时间复杂度 $\Theta(m \log m)$ 。期望得分：70。

算法四

假设所有变量与 n 同级。

将给定的路径视为字符串，那么一条合法路径就相当于不包含给定的字符串。

尝试用 AC 自动机来解决这个类似字符串匹配的问题。将给定的字符串和 $1 \sim n$ 这 n 个单点插入 trie 树并构建出 AC 自动机的 fail 树。

之后把在原图上行走的过程搬到 AC 自动机上面，最后就要求 1 到某个结尾为 n 的节点的最短路，并且不能经过包含给定字符串的节点。标记不能经过的节点可以简单解决，不多赘述。

直接在 AC 自动机上面跑最短路，如果每个节点暴力遍历它代表的结尾的点的出边，那么会让复杂度到达 $\Theta(n^2)$ 级别，无法通过。

注意到这样的遍历很多都是无用的：两个 AC 自动机上的点，它们代表的结尾的点是相同的，那么可能有很多相同的出边，导致这两个 AC 自动机上的点到达了 AC 自动机上的同一个点，这造成了很大浪费。

考虑 AC 自动机的字符串匹配过程：对于某个 AC 自动机上的点 x ，其与 $fail_x$ 会走向不同 AC 自动机上点的边只有 x 在 trie 树上指向其儿子的边在原图中所代表的边。而对于剩下的边，如果在跑最短路的时候已经被松弛过，那么 x 再松弛这些边就没有意义。

于是尝试使用可持久化数组（线段树）减少无用边的遍历量：对于 x ，在 $fail_x$ 连出去的边的基础上，修改 x 在 trie 树上与其儿子的边（若 x 代表单点则插入原图上的所有出边），使得其到达的 AC 自动机上的点为 x 对应的儿子。这样在跑最短路的时候，松弛一个点出边时 dfs 它出边的版本对应的线段树，找到所有还未松弛的出边进行松弛。当一个可持久化线段树上的点子树内代表的边全部被松弛完之后，这个点就没有用处了，直接将其删除。这样，由于每遍历到一个点，就代表它子树内至少被松弛了一

条边。而只有 $\Theta(m + \sum len_i)$ (len_i 为第 i 条给定路径的长度) 条边会被松弛, 所以时空复杂度 $\Theta(m \log m)$ 。

期望得分: 100。

参考文献

[1] [oi-wiki: ac-automaton](#)

[2] [oi-wiki: persistent-seg](#)