

《卑鄙的下毒人》解题报告

杭州第二中学 修煜然

2022.10

1 题目描述

演讲家喜欢吃黄油蛋糕，他准备用 n 种原料制作 m 个黄油蛋糕，第 i 个黄油蛋糕由 $[l_i, r_i]$ 中的原料制成。

小鱼人想要毒死演讲家，他可以执行以下两种操作：

1. 在某一原料中加入一瓶毒药，花费 k 的代价， k 是一个给定正整数。
2. 在某一黄油蛋糕中加入一瓶毒药，花费 1 的代价。

注意同一原料或同一黄油蛋糕中可以被下多次毒。

如果第 i 个黄油蛋糕中，所有组成他的原料中的毒药数的和 + 这个黄油蛋糕中的毒药数 $\geq a_i$ ，那这个黄油蛋糕就有剧毒，其中 a_i 是给定正整数。

小鱼人想让所有黄油蛋糕都有剧毒，最少代价？

2 数据范围

对于所有数据， $1 \leq n, m \leq 5 \times 10^5, 1 \leq k \leq 5, 1 \leq w_i \leq 10^9$

子任务编号	$n \leq$	$m \leq$	$k \leq$	$w_i \leq$	分值
1	20	20	5	1	10
2	5000	5000	5	10^9	20
3	5×10^5	5×10^5	1	10^9	20
4	5×10^5	5×10^5	5	1	20
5	5×10^5	5×10^5	5	10^9	30

3 解题过程

3.1 算法一

枚举 n 个 y_i ，此时每个 z_i 独立，因此每个 z_i 可以取到最小值 $\max(0, w_i - \sum_{j=l_i}^{r_i} y_j)$

复杂度 $O(m(w+1)^n)$ ，可以通过子任务 1。

3.2 算法二

题意等价于求

$$\begin{aligned} \min & k \sum y_i + \sum z_i \\ \forall i \in [1, m], & z_i + \sum_{j=l_i}^{r_i} y_j \geq w_i \end{aligned}$$

对偶得到

$$\begin{aligned} \max & \sum w_i x_i \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [1, n], \sum_{j, i \in [l_j, r_j]} x_j \leq k \\ x_i \leq 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

相当于是，在给定 m 个带权区间中，选一些价值最大的区间使得每个位置被覆盖至多 k 次。

若 $k=1$ ，可以用 f_i 表示考虑 $r \leq i$ 的所有区间，权值和最大是多少。

有转移 $f_i = \max(f_{i-1}, \max_{r_j=i} f_{l_j-1} + w_j)$

复杂度 $O(n)$ ，可以通过子任务 1, 3。

3.3 算法三

若 $w_i=1$ ，可以考虑贪心算法。

维护 k 组区间，初始全为 $\{[0, 0]\}$ ，按 r_i 从小到大考虑每个区间。

每次找最后一个的右端点 $< l_i$ 的中最大的，如果存在这样的组，就插入到这组最后，如果没有就跳过。

贪心正确性显然。

复杂度 $O(n(k + \log n))$ ，可以通过子任务 4

3.4 算法四

建立源点 S 和汇点 T 。

第 i 个位置向第 $i + 1$ 个位置连容量为 k ，代价为 0 的边。

对每个区间 $[l_i, r_i]$ ，从 l_i 向 $r_i + 1$ 连容量为 1，代价为 $-w_i$ 的边。

求出的最小费用最大流的相反数就是答案。

如果使用 *spfa* 求最短路，复杂度 $O(knm)$ ，可以通过子任务 1,2。

如果使用 *dijkstra* 求最短路，第一次增广时边有负权，但此时图是 dag，可以特殊处理，复杂度 $O(km \log n)$ ，可以通过本题。

4 参考资料

Dual linear program - Wikipedia , https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_linear_program