《妙妙题》解题报告

题面

题目描述

这是一道交互题，希望大家玩得开心 :)

有 N 个人，标号分别为 $0, 1, \ldots, N-1$，按逆时针顺序面对面地依次围成一个圈。他们会进行若干轮游戏，每轮游戏中每个人头上会佩戴一顶帽子，可能是黑色或白色的。每个人只能看到其他人的帽子颜色以及在简单模式下能得知自己的编号。所有人在进行观察后要同时猜测自己帽子的颜色，你要设计一个**确定性的**策略使得猜中的人数尽可能多。

具体地，你的策略是一个函数 $f(a_0, a_1, \ldots, a_{N-2}, x)$。其中 $a_i \in \{0,1\}$ 代表一个人看到的右手边第 $i+1$ 个人的帽子颜色（0 为白色，1 为黑色，下同）。在简单模式下，x 为这个人的编号，否则 $x=-1$。函数将要返回一个 0 或 1 代表这个人猜测的自己帽子的颜色。

在一轮游戏中，若第 i 个人帽子颜色为 $b_i \in \{0,1\}$，那么你的策略能使 $\sum_{i=0}^{N-1}(1-|f(b_{(i+1) \bmod N}, b_{(i+2) \bmod N}, \ldots, b_{(i+N-1) \bmod N}, x_i) - b_i|)$ 个人猜中自己帽子颜色。其中若在简单模式下，$x_i = i$，否则 $x_i = -1$。

实现细节

请确保你的程序开头有 `#include "tmp.h"`。*'tmp' is short for 'the miaomiao problem'.*

你不需要，也不应该实现主函数。你需要实现如下几个函数：

```
void init (int N, bool Type, int p);
```

该函数将在每个测试点开始测试时恰好被调用一次，用来告诉你该测试点的一些信息。其中：

- N 表示人数。
- $Type$ 表示是否为简单模式，若为 1 则是，否则不是。
- p 表示评分参数，具体见【数据范围与评分方式】。

```
bool guess (unsigned long long A, int x);
```

该函数代表你给出的策略，即【题目描述】中的 f。其中 `unsigned long long A` 为 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-2}$ 压位后的结果，你可以通过表达式 `((A>>i)&1)` 来获得真实的 $a_i (0 \le i \le N-2)$。该函数的返回值即为 $f(a_0, a_1, \ldots, a_{N-2}, x)$。

最终测试时，对于每个测试点，交互库会**恰好**调用一次 `init` 函数。然后将该测试点中**需要**用到的 $f(a_0, a_1, \ldots, a_{N-2}, x)$ 找出，并以**任意**顺序调用 `guess` 来得到每个 f 的值。你可以以查看参考交互库了解更多实现细节。

测试程序方式

本题下发文件中提供了一个交互库的参考实现 `grader.cpp` 和所需头文件 `tmp.h`。最终测试时所用的交互库实现与该实现**仅有**随机种子与反作弊上的不同。

你可以将自己的程序 `tmp.cpp` 与 `grader.cpp` 以及 `tmp.h` 放在同一目录下并通过命令 `g++ tmp.cpp grader.cpp` 来生成可执行文件。

该可执行文件运行方式如下：

- 可执行文件将从标准输入读入以下格式的数据：
  - 第一行三个整数 $N, Type, p$，分别表示人数，是否为简单模式以及评分参数。
  - 第二行一个整数 T 表示该数据中进行的游戏轮数。
  - 接下来 T 行每行一个整数 B 表示每轮游戏里每个人的帽子颜色 $b_0, b_1, \ldots, b_{N-1}$ 的压位表示。你可以通过表达式 `((B>>i)&1)` 来获得真实的 $b_i(0 \le i \le N-1)$。
- 读入之后，交互库会进行测试。若没有出现运行时错误，则会输出：
  - 第一行一个整数，代表总共 T 轮游戏中猜中人数的第 p **小**值。
  - 第二行一个浮点数，代表你的程序在该数据中的得分占该数据总分值的比值。

数据范围与评分方式

本题共有 26 个测试点，测试点**不**等分。

对于每个测试点保证：

- 时间限制为 4 秒，空间限制为 1 GiB。
- 交互库所用时间不超过 1 秒，所用空间不超过 256 MiB。
- $3 \le N \le 64, Type \in \{0,1\}, 1 \le p \le T, T = 2^{\min\{N,16\}}, 0 \le B < 2^N$。

每个测试点的具体限制及分值如下：

测试点编号	$N=$	$Type=$	$p=$	测试点分值
1	47	1	512	3
2	48	1	1	3
3	3	0	1	2
4	4	0	1	2
5	5	0	1	2
6	6	0	1	2
7	7	0	1	3
8	8	0	1	3
9	9	0	1	3
10	10	0	1	3
11	11	0	1	4
12	12	0	1	4
13	13	0	1	4
14	14	0	1	4
15	15	0	1	4
16	16	0	1	4

测试点编号	$N=$	$Type=$	$p=$	测试点分值
17	28	0	4096	5
18	29	0	512	5
19	30	0	64	5
20	31	0	1	5
21	32	0	1	5
22	60	0	4096	5
23	61	0	512	5
24	62	0	64	5
25	63	0	1	5
26	64	0	1	5

同时，对于 $p>1$ 的测试点，保证 B 在所有 $[0,2^N)$ 间的整数中均匀随机生成。

每个测试点均有部分分，具体评分方式为：对于一个分数为 P 的测试点，记你在该测试点中总共 T 轮游戏里猜中人数的第 p **小**值为 x。那么若 $x=0$，则你在该测试点中得分为 0。否则，记 k 为满足 $x \geq \left\lfloor \frac{N-1}{k} \right\rfloor$ 的最小的 >1 的整数，则你在该测试点中得分为 $\frac{P}{(k-1)^{1.5}}$ （不进行取整）。

解题过程

算法？

我会乱搞！期望得分？。

算法〇

该算法用于解决 $Type=1$ 的情况。

注意到此时每个人都能知道自己的编号，于是可以按照编号将所有人分为数量尽可能相等的两组 A,B，一种可行的分发是按编号的奇偶性分组。

那么可以据此构造策略：对于一个 A 组的人，他猜测自己帽子为黑色当且仅当他看到的白色帽子数量为奇数；对于一个 B 组的人，他猜测自己帽子为黑色当且仅当他看到的白色帽子数量为偶数。

在这种策略下，A,B 两组中一定恰有一组使得其中所有人都猜中，于是能够保证至少 $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ 个人猜中。

期望得分 6 分。

算法一

该算法以及接下来的算法均用于解决 $Type=0$ 的情况。

我会爆搜！枚举所有可能的 f 并计算猜中数量的最小值，时间复杂度 $\tilde{O}(2^{2^{N-1}}+T)$，可以添加若干剪枝，期望得分 $\geq$ 6。

算法二

本算法与正解没有直接关系。

以下字符串下标均从 0 开始。

一些记号：

- 对于两个长度为 N 的 `01` 串 s,t，称其为循环同构（记作 $s \sim t$）当且仅当存在整数 d 使得 $\forall 0 \le i < N, s_i = t_{(i+d) \bmod N}$。容易发现循环同构关系为等价关系，记 s 的等价类为 $[s] = \{t \mid t \sim s\}$。同时记 s 的长度为 $N-1$ 的循环子串集合为 $(s) = \{t_{0,\dots,N-2} \mid t \sim s\}$。
- 对于长度为 N 的 `01` 串 s，称其为周期的当且仅当存在 $d \mid N$ 且 $d < N$ 使得 $\forall 0 \le i < N-d, s_i = s_{i+d}$。容易发现若 s 为周期的则 $[s]$ 中所有串也为周期的。
- 对于长度为 $N-1$ 的 `01` 串 t，记 $t(0)$ 为 t 拼接上字符 `0`，$t(1)$ 为 t 拼接上字符 `1`。称其为准周期的当且仅当 $t(0)$ 为周期的或 $t(1)$ 为周期的。

那么有如下两个引理：

- 引理 1：对于准周期的串 t，$t(0)$ 和 $t(1)$ 不可能均为周期的。
- 引理 2：对于非周期的串 s，(s) 中至多有 $N-2\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor$ 个串是准周期的，而剩下的非准周期串互不相同。

这两个引理可以通过分类讨论的方式来证明，至于更简洁的证明方式将在介绍完算法三后给出。

现在开始设计策略：若一个人看到的串 $t = a_0a_1\dots a_{N-2}$ 为准周期的，那么他将猜测 i 使得 $t(i)$ 是周期的。这样，若一轮游戏的帽子序列 $s = b_0b_1\dots b_{N-1}$ 为周期的，则这种策略能使所有人均猜中。

对于剩下的情况，构造一个二分图，该图的左部点为所有长度为 $N-1$ 的非准周期 `01` 串，右部点为所有长度为 N 的非周期 `01` 串构成的等价类。对于每个左部点 t，令其向右部点 $[t(0)],[t(1)]$ 各连一条边。

那么此时的策略 f 就等同于：对于所有 $t = a_0a_1\dots a_{N-2}$，将 t 向 $[t(f(a_0,\dots,a_{N-2},-1))]$ 所连的边标记。而对于一轮帽子序列为 $s = b_0b_1\dots b_{N-1}$ 的游戏，猜中的人数为与右部点 $[s]$ 相连的被标记的边数。

注意到左部点度数均为 2。而根据引理 2，每个右部点度数至少为 $2\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor$。于是可以把每个右部点拆成至少 $\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor$ 个度数为 2 的点，然后找出一组完美匹配（由 Hall 定理，一定存在），便构造出了一组标记边的方案使得与每个右部点相连的被标记的边数至少为 $\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor$，进而构造出了一个能保证至少 $\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor$ 个人能猜中的策略。

时间复杂度 $O(2^{\frac{3}{2}N}+T)$，期望得分 44，结合算法〇期望得分 50。

算法三

直接给出策略：

$$f(a_0,\dots,a_{N-2},-1) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y = 0 \\ 1 & \text{if } x \ne 0 \land y = 0 \\ (s+1) \bmod 2 & \text{if } y > 0 \\ s \bmod 2 & \text{if } y < 0 \end{cases}$$

其中

$$s = \sum_{i=0}^{N-2} a_i, x = \sum_{i=0}^{N-2} a_i \cos\left(\frac{2\pi(i+1)}{N}\right), y = \sum_{i=0}^{N-2} a_i \sin\left(\frac{2\pi(i+1)}{N}\right)$$

这是为什么呢？让我们回到算法〇，仍然考虑将所有人分为数量尽可能相等的两组 A,B。

注意到如果将这 N 个人以逆时针顺序排在平面直角坐标系中单位圆的 N 等分点上（不妨设第 i 个人的坐标为 $e_i = (cos\frac{2\pi i}{N}, sin\frac{2\pi i}{N})$），那么任意一条经过原点的有向直线都能将平面分成两个部分使得每个部分至少有 $\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor$ 个人。

怎么确定一条有向直线呢？注意当帽子序列为 $b_0, b_1 \ldots, b_{N-1}$ 时向量 $v = \sum_{j=0}^{N-1} b_j e_j$ 所在有向直线是一个很好的选择（当 v 为 0 向量时先按下不表）。对于第 i 个人，记 $k_i = e_i \times v$：若 $k_i > 0$ 则将其分到 A 组；若 $k_i < 0$ 则将其分到 B 组；若 $k_i = 0$，则说明该有向直线恰好穿过第 i 个人，这种情况先按下不表。据此分组，则 A, B 中至少有 $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ 个人，接着执行算法〇中分组之后的策略即可使至少 $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ 个人猜中。

接下来有两个问题：一是计算 t_i 时似乎需要知道所有 $b_0, b_1, \ldots, b_{N-1}$，信息量比简单模式还多；二是被按下不表的情况还未解决。

先考虑第一个问题，注意到

$$t_i = e_i \times v = e_i \times \sum_{j=0}^{N-1} b_j e_j = \sum_{j=0}^{N-1} b_j (e_i \times e_j) = \sum_{j=0}^{N-1} b_{(i+j) \bmod N} (e_i \times e_{(i+j) \bmod N})$$

发现 $e_i \times e_{(i+j) \bmod N}$ 只和这两个向量的夹角有关，也即只和 j 有关！而且有 $e_i \times e_i = 0$，所以给 f 传入的 $b_{(i+1) \bmod N}, b_{(i+2) \bmod N}, \ldots, b_{(i+N-1) \bmod N}$ 已经足够确定 t_i！

再考虑第二个问题，若 v 为 0 向量，那么对于所有 $0 \le i < N$，第 i 的人算出的 t_i 为 0，考虑确定此时第他的策略：记 $u_i = v - b_i e_i$，若 u_i 为 0 向量，则猜 0；否则猜 1（注意判断 u_i 是否为 0 向量也仅需要 f 传入的参数）。那么容易验证这种策略能在 $v = 0$ 的情况下使所有人猜中，同时也不影响其它情况下的策略！

综上，即可得到一开始给出的策略，时间复杂度 $O(TN)$，期望得分 100。

最后考虑算法二中的两个引理：注意到周期串的 v 一定为 0 向量，于是引理 1 是平凡的；而引理 2 等价于 v 所在直线至多经过 $N - 2\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ 个点，也是平凡的。

最优性

值得一提的是，在 $Type = 0$ 的情况下，$\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ 达到能保证猜中人数的上界，以下给出证明。

考虑所有帽子序列的可能情况中猜中的人数的平均值，为：

$$\frac{1}{2^N} \sum_{(b_0,\ldots,b_{N-1}) \in \{0,1\}^N} \sum_{i=0}^{N-1} (1 - |f(b_{(i+1) \bmod N}, b_{(i+2) \bmod N}, \ldots, b_{(i+N-1) \bmod N}, x_i) - b_i|)$$
$$= \frac{1}{2^N} \left(N2^N - N \sum_{(a_0,\ldots,a_{N-2}) \in \{0,1\}^{N-1}} |f(a_0, \ldots, a_{N-2}) - 1| + |f(a_0, \ldots, a_{N-2}) - 0| \right)$$
$$= \frac{N}{2}$$

而猜中人数的最小值将不超过平均值，于是当 N 为奇数时得证。而当 N 为偶数时，当所有人帽子颜色相同时，只能保证所有人均猜中，那么剩下情况的平均值将会小于 $\frac{N}{2}$，于是也得证。

总结

本题极大程度地考察了选手的思维能力，希望大家玩得开心 :)

本题中 $Type = 1$ 的情况是经典问题（一个来源是 The Puzzle Toad），但思路对最终解法至关重要。

而 $Type = 0$ 的情况改编自我校数学竞赛选手的训练题 （*upd: 原题是 IMO2017 revenge T4*），在与同学的讨论中，笔者得到了较为套路化的算法二和更为巧妙的算法三，以及一些能使一些人猜中但达不到上界的算法。遗憾的是，在数学竞赛中无法将这些算法进行区分。但在信息学竞赛的框架下，则能够根据选手的思考程度，给出较为客观的得分。

如果你还有别的算法，欢迎与大家分享！