

IOI 2023 中国国家集训队互测 大冬天题 题解

题意简述

给定连续的 $2k$ 个正奇数，请将这些奇数中的较小的 k 个和较大的 k 个两两配对，并最大化互质的数对数量。

设给出奇数的平均值为 n 。保证 $k \leq 10^6$, $2k \leq n \leq 10^{100}$ 。

解法

暴力解法 1

暴力枚举所有配对方式。时间复杂度 $O(k! \times \text{poly}(k))$ ，预计得分 5 分。

暴力解法 2

方便起见，下面称较小的 k 个奇数为小数，较大的 k 个奇数为大数。

考虑状态压缩 DP，设 $dp(S)$ 表示所有 S 中的大数和前 $|S|$ 个小数匹配能产生的最大互质对数量。预处理出每对大数、小数之间的互质情况，可以做到 $O(2^k \times \text{poly}(k) + k^2 \log n)$ 的时间复杂度，预计得分 10 分。

暴力解法 3

注意到本题可以转化为二分图上的匹配问题。考虑建立一张二分图，左部、右部的节点分别代表全体小数、大数，两点之间连边当且仅当它们代表的数互质。则原问题等价于求该图的最大匹配，使用匈牙利算法 / 网络流均可求解。

时间复杂度 $O(k^3) \sim O(k^2)$ ，预计得分 25 ~ 35 分。

标准解法

上面的算法都没有利用本题和互质有关的性质。我们试着来分析一下。

观察 如果两个奇数的差为 2^c ，其中 c 是某个正整数，则这两个奇数一定互质。

证明 显然。

我们不妨猜测，所有的数可以全部匹配上。下面来说明这一点。

设最小的小数为 a 。注意到

引理 存在一个大数 b 使得 $b - a$ 是 2 的正整数次幂。

证明 注意到大数中最小的数减去 a 的结果为 $2k$ ，最大的数减去 a 的结果为 $4k - 2$ 。设大于等于 $2k$ 的最小的 2 的次幂为 x ，则显然 $x \leq 4k - 2$ （否则 $\frac{x}{2} \geq 2k$ 是更小的 2 的次幂），那么 $a + x$ 就是符合条件的 b 。

我们找到这样的 b 后，注意到 $(a, b), (a + 2, b + 2), (a + 4, b + 4), \dots$ 都是互质对。我们一直这样找下去，直到最大的大数被用到为止。注意到此时还没有用上的数仍然是连续的若干奇数，我们递归地处理即可。

时间复杂度 $O(k)$ 。可以通过此题。

其他做法

可能有一些随机化 / 调整的做法能通过子任务 4 ~ 7 中的若干。本题给出的图性质特殊，很多二分图最大匹配的贪心做法都可能获得不错的分数。

子任务 5 ($n = 2k$) 存在一些针对性的做法。例如，对每个 $[2k + 1, 4k]$ 中的奇数 x ，我们将 x 与 $x + 1$ 的最大奇因子配对，容易证明这是合法的。时间复杂度也为 $O(k)$ 。

出题经过与感想

参考文献 [1] 中提到了一个很经典的数论问题：在 $1 \sim 4n$ 的正整数中选出若干个使得它们两两既不整除也不互质，求证至多只能选出 n 个数。我们试图构造 n 组数，每组中的任意两个要么整除要么互素。考虑将 $a, 2a, 4a, \dots$ 都分到一组，那么现在有 $2n$ 组数，我们还需要将这些数两两合并。这些组中有 n 组只有一个元素，还有 n 组有至少两个元素（分别是大数的数组、小数的数组）。注意到小数的数组两两不能放在一起，一个自然的想法就是将大数数组和小数数组两两匹配。这便是这道题目的来历。当时笔者给出的构造方法就是上面题解中给出的标准解法，后来看了官方的答案，发现其更为简洁但功能不够强大，便作为了本题的部分分。

本题的构造比较精巧，希望能带给各位选手一些启发。

参考文献

[1] [【数论&组合专题】整数之间的爱恨情仇（一）互不整除/互素问题研究](#)，程牧炯。