《森林游戏》解题报告

刘一平
山东省潍坊第一中学

一、 题目大意

给定一个 n 个点的有根树森林，点有点权 A_i。两个玩家轮流操作，每次可以选择一个树根删除，获得这个点的点权，它的子树成为新的有根树。

所有点都删除后游戏结束，玩家的得分是他删除的点权和。玩家的目标是最大化得分，求最终先手的得分。

二、 数据范围

对于所有数据，$1 \le A_i \le 10^9$。

子任务编号	$\mathbf{n} \le$	特殊性质	分值
1	20	无	20
2	1000	无	20
3	2×10^5	A	20
4	2×10^5	B	20
5	2×10^5	无	20

特殊性质 A：设 p_i 为 i 的父亲，那么对于所有 $2 \le i \le n$ 有 $A_i \le A_{p_i}$。

特殊性质 B：所有 A_i 在 $[1, 10^9]$ 的整数内等概率随机。

时间限制：$3s$。

空间限制：1024 MB。

三、 解题过程

3.1 问题引入

给定一张有向无环图 $G=(V,E)$，每个点 $v\in V$ 有一个实数点权 A_v。

两名玩家轮流操作，每次可以选择一个入度为 0 的点，获得它的点权，然后删除它以及所有与它相关的边。图为空时游戏结束。

玩家的目标是最大化自己的点权和，求最终每个玩家的点权和。

3.2 算法简述

设当前权值为先手的点权和减后手的，那么先手想最大化权值，后手想最小化权值。

定义在先后手的最优策略下，得到的权值为 $\mathrm{val}(G)$。

先考虑链的情况。设链首为 x，第二个点为 M，且 M 为这条链中权值最大的点。贪心地考虑，玩家应该不希望删除 x，不然另一个玩家就可以删除 M 了。

如果 M 为链尾，那么 x,M 应该是游戏中最后删除的两个点。因此得到如下定理。

劣势移动定理: 设删除 x,M 后得到的图为 G'，那么 $\mathrm{val}(G)=\mathrm{val}(G')+(-1)^n(A_x-A_M)$，其中 $n=|V|$ 表示 G 的点数。

否则，玩家删除 x 的唯一目的应该是删除 x 后面的点，并且在他删除 x、另一个玩家删除 M 后，该玩家一定会删除 M 的下一个点，否则他没必要先删除 x。设 M 的下一个点为 y，有如下定理。

融合定理：将 x,M,y 合并为一个点权为 $A_x+A_y-A_M$ 的点，设得到的图为 G'，那么 $\mathrm{val}(G)=\mathrm{val}(G')$。

使用上面两个定理，可以将一条链变为从上至下单调不增的。

我们自然想把任意情况规约到链上。考虑一个点的两个子树，如果这两个子树都已经转化为从上至下单调不增的链，那么在删除这两个子树的点时，应该删除其中的较大值。有如下定理。

归并定理：如果一个点的某两棵子树（或两个不同的有根树）都是从上至下单调不增的链，那么可以将这两条链归并成一条。设得到的图为 G'，那么 $\mathrm{val}(G) = \mathrm{val}(G')$。

本题为一种特殊情况：G 是有根树森林，边从父亲指向儿子。通过上述三个定理，可以将整张图变为一条链，然后先后手依次取点即可。

使用数据结构维护链，时间复杂度可以做到 $O(n \log n)$ 或 $O(n \log^2 n)$。

在考场上，上述三个定理可以用贪心的想法猜出，可以通过与暴力对拍的方式验证。接下来我们将严谨证明这三个定理。

3.3 证明

3.3.1 定义与基本性质

对于有向无环图 $G = (V, E)$，定义 G 的“拓扑关系”为有序对集合 $\mathrm{top}(G) = \{(u, v) \mid u \neq v,\ u\text{能到达}v\}$。

对于两个有向无环图 G, H，如果 $\mathrm{top}(G) = \mathrm{top}(H)$，那么 G 和 H 在游戏中完全等价。

定义游戏的一个**局面**为一个取点序列 $\alpha \in V^*$（S^* 表示元素属于 S 的序列集合），但不是所有局面都是可能出现的。

对于 $S \subseteq V$，称 S **合法**当且仅当：对于所有 $u \in V \setminus S,\ v \in S$，有 $(u, v) \notin \mathrm{top}(G)$。

定义 $\mathrm{valid}(G) = \{S \subseteq V \mid S\text{合法}\}$。$\mathrm{valid}(G)$ 是所有合法局面的点集集合。

对于局面 $\alpha \in V^*$，称 α **合法**当且仅当：α 中的元素两两不同，且其中元素构成的集合合法。

定义 $\mathrm{valid}^*(G) = \{\alpha \in V^* \mid \alpha\text{合法}\}$。$\mathrm{valid}^*(G)$ 是所有合法局面的集合。

对于局面 $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$，其中 $v_i \in V$。定义它的**权值**为

$$\mathrm{val}_G(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} A_{v_i}$$

先手想最大化权值，后手想最小化权值。

定义一个**策略**为一个局面到点的函数 $\sigma : V^* \to V$，$\sigma(\alpha)$ 表示当前局面是 α 时，下一步取的点。

称一个策略 σ **合法**，当且仅当：对于所有 $\alpha \in \mathrm{valid}^*(G)$ 且 $|\alpha| < |V|$ 有 $\alpha + \{\sigma(\alpha)\} \in \mathrm{valid}^*(G)$。这里加号表示序列的连接。

定义 G 的合法策略集合为 $\mathrm{valid}^\star(G)$。

给定两个合法策略 σ, ρ,定义这两个策略产生的局面 $\alpha(\sigma, \rho) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 如下：

$$v_i = \begin{cases} \sigma(\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}) & i\text{是奇数} \\ \rho(\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}) & i\text{是偶数} \end{cases}$$

此时称 σ 为**先手策略**，ρ 为**后手策略**。注意，先手策略只需要关注偶数长度的局面，后手策略只需要关注奇数。

这两个策略产生的权值定义为

$$\mathrm{val}_G(\sigma, \rho) = \mathrm{val}_G(\alpha(\sigma, \rho))$$

我们关心的是一轮游戏的**最优权值**，即双方都采用最优策略得到的权值。

对于某时刻已经被移除的点集为 $S \in \mathrm{valid}(G)$，定义下一步可操作的点集为 $\mathrm{avail}_G(S) = \{v \in V \setminus S \mid S \cup \{v\} \in \mathrm{valid}(G)\}$。

定义 $\mathrm{val}_G(S)$ 为当前游戏的最优权值，那么

$$\mathrm{val}_G(S) = \begin{cases} 0 & S = V \\ \max\limits_{v \in \mathrm{avail}_G(S)} (A_v - \mathrm{val}_G(S \cup \{v\})) & \texttt{otherwise} \end{cases}$$

定义游戏的权值为

$$\mathrm{val}(G) = \mathrm{val}_G(\emptyset)$$

另一种定义权值的方式是使用策略的语言：

$$\mathrm{val}(G) = \max_{\sigma \in \mathrm{valid}^\star(G)} \min_{\rho \in \mathrm{valid}^\star(G)} \mathrm{val}_G(\sigma, \rho) = \min_{\rho \in \mathrm{valid}^\star(G)} \max_{\sigma \in \mathrm{valid}^\star(G)} \mathrm{val}_G(\sigma, \rho)$$

容易证明这两种定义等价。

根据定义，对于所有先手策略 σ 有

$$\operatorname{val}(G) \geq \min_{\rho} \operatorname{val}_G(\sigma, \rho)$$

定义 σ 是**先手最优策略**当且仅当等号成立。

对于所有后手策略 ρ 有

$$\operatorname{val}(G) \leq \max_{\sigma} \operatorname{val}_G(\sigma, \rho)$$

定义 ρ 是**后手最优策略**当且仅当等号成立。

引理 1. 设 σ 和 ρ 分别是任一先后手的最优策略。那么：

(i) 对于任意 ρ'，$\operatorname{val}_G(\sigma, \rho') \geq \operatorname{val}(G)$。

(ii) 对于任意 σ'，$\operatorname{val}_G(\sigma', \rho) \leq \operatorname{val}(G)$。

(iii) $\operatorname{val}(G) = \operatorname{val}_G(\sigma, \rho)$。

证明是容易的，这里略去。

引理 2. 对于有向无环图 G，在其中加入一条边后得到有向无环图 G'，如果存在先手的最优策略 σ 和后手的最优策略 ρ 满足 $\sigma, \rho \in \operatorname{valid}^\star(G')$，那么 $\operatorname{val}(G) = \operatorname{val}(G')$。

证明. 容易证明 $\operatorname{valid}^\star(G') \subseteq \operatorname{valid}^\star(G')$。

对于任意 $\sigma', \rho' \in \operatorname{valid}^\star(G')$，$\operatorname{val}_{G'}(\sigma', \rho') = \operatorname{val}_G(\sigma, \rho)$。

我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(G') &= \max_{\sigma'\in\mathrm{valid}^\star(G')}\min_{\rho'\in\mathrm{valid}^\star(G')}\mathrm{val}_G(\sigma',\rho') \\
&\le \max_{\sigma'\in\mathrm{valid}^\star(G')}\mathrm{val}_G(\sigma',\rho) \\
&\le \max_{\sigma'\in\mathrm{valid}^\star(G)}\mathrm{val}_G(\sigma',\rho) \\
&= \mathrm{val}(G)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(G') &= \min_{\rho'\in\mathrm{valid}^\star(G')}\max_{\sigma'\in\mathrm{valid}^\star(G')}\mathrm{val}_G(\sigma',\rho') \\
&\ge \min_{\rho'\in\mathrm{valid}^\star(G')}\mathrm{val}_G(\sigma,\rho') \\
&\ge \min_{\rho'\in\mathrm{valid}^\star(G)}\mathrm{val}_G(\sigma,\rho') \\
&= \mathrm{val}(G)
\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{val}(G)=\mathrm{val}(G')$$

□

引理 2 可以改变图的拓扑结构，配合“只要拓扑结构不变，游戏等价”的性质，可以帮我们转化图的形态。

引理 3 (对比构造引理)**.** 对于两个游戏 G,H，设 σ 为 G 的任一先手最优策略，那么 $\mathrm{val}(G)\le\mathrm{val}(H)$ 当且仅当存在 $\sigma'\in\mathrm{valid}^\star(H)$，满足：

$$\begin{aligned}
\forall &\quad \rho\in\mathrm{valid}^\star(H) \\
\exists &\quad \rho'\in\mathrm{valid}^\star(G) \\
\textbf{s.t.} &\quad \mathrm{val}_G(\sigma,\rho')\le\mathrm{val}_H(\sigma',\rho)
\end{aligned}$$

如果 $\mathrm{val}(G)=\mathrm{val}(H)$，则 σ' 也是 H 的先手最优策略。

证明.

$$\begin{aligned}
&\text{原命题} \\
\Leftrightarrow\quad & \min_{\rho''}\mathrm{val}_G(\sigma,\rho'')\le\max_{\sigma''}\min_{\rho}\mathrm{val}_H(\sigma'',\rho) \\
\Leftrightarrow\quad & \mathrm{val}(G)\le\mathrm{val}(H)
\end{aligned}$$

如果 $\mathrm{val}(G)=\mathrm{val}(H)$，那么

$$\begin{aligned} & \mathrm{val}(G) \le \min_\rho \mathrm{val}_H(\sigma', \rho) \le \mathrm{val}(H) \\ \Rightarrow\quad & \min_\rho \mathrm{val}_H(\sigma', \rho) = \mathrm{val}(H) \end{aligned}$$

即 σ' 是 H 的先手最优策略。

□

对比构造引理可以帮助我们根据 σ 构造 σ'。应用到 $G = H$ 的情况中，可以构造满足特定限制的最优策略；应用到 $G \ne H$ 的情况中，可以用来证明 $\mathrm{val}(G) \le \mathrm{val}(H)$。

构造 σ' 时，需要考虑它应对每个 ρ 的策略。我们构造一个辅助策略 ρ'，对比 (σ, ρ') 和 (σ', ρ) 两个游戏的局面，同时从前到后构造 σ' 和 ρ'。构造 σ' 时只能使用 σ 的策略以及当前局面中 ρ 的信息，这样不同 ρ 构造出的 σ' 才是没有冲突的。具体的构造思路可以在下文逐步理解。

对于一个节点序列 $\{u_1, u_2 \ldots, u_k\}$，称它为一条**链**当且仅当：

- 对于所有 $1 \le i \le k-1$，u_i 的出度为 1，指向 u_{i+1}。
- 对于所有 $2 \le i \le k$，u_i 的入度为 1，来自 u_{i-1}。
- u_k 的出度为 0。

定义 u_1 为这条链的**链首**，u_k 为这条链的**链尾**。

注意：在定义中，链首的前方可以存在其它节点，但链尾的后方不行；链不需要是极长的（u_1 的入度可以为 1）。

3.3.2 融合定理

定理 4 (融合定理)**.** *考虑图 $G = (V, E)$ 中的一条链 $\{x, M, y, p_1, p_2, \ldots, p_l\}$，满足 $A_M \ge A_x, A_y, A_{p_i}$（$1 \le i \le l$）。*

设 G' 为将 x, M, y 融合为一个权值为 $A_x + A_y - A_M$ 的点后的图，那么 $\mathrm{val}(G) = \mathrm{val}(G')$。

证明. 设 p_0 为 x, M, y 融合后的点，即 $A_{p_0} = A_x + A_y - A_M$。

应用对比构造引理。设 σ 为 G 的任一先手最优策略，考虑构造一个 G' 的先手策略 σ'。对于所有 ρ，考虑 σ' 对抗 ρ 的情况，引入辅助策略 ρ' 对抗 σ，同时从前到后构造 σ' 和 ρ'。

首先，我们尽可能保持 G 和 G' 的局面相同。

设当前 G 与 G' 的局面都为 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i\}$：

- 如果 i 为偶数（当前先手操作）：
  - 如果 $\sigma(\alpha) \neq x$，就令 $\sigma'(\alpha) := \sigma(\alpha)$，$\alpha_{i+1} := \sigma'(\alpha)$，继续。
  - 否则无法保持相同，进入情况 1。
- 如果 i 为奇数（当前后手操作）：
  - 如果 $\rho(\alpha) \neq p_0$，就令 $\rho'(\alpha) := \rho(\alpha)$，$\alpha_{i+1} := \rho'(\alpha)$，继续。
  - 否则无法保持相同，进入情况 2

为了方便描述，下面称这样的构造为**模仿构造**，即让 σ', ρ' 模仿 σ, ρ。

下表中，第一行表示每一步的玩家，第二行表示 (σ, ρ') 的当前局面，第三行表示 (σ', ρ) 的当前局面，Δ 表示下方局面的权值减去上方局面的权值。为了美观，Δ 直接使用点来表示点权。

	1	2		
(σ, ρ')	α_1	α_2	$\cdots$	α_i
(σ', ρ)	α_1	α_2	$\cdots$	α_i

$$\begin{aligned}\Delta &= (\alpha_1 - \alpha_2 + \cdots) - (\alpha_1 - \alpha_2 + \cdots) \\ &= 0\end{aligned}$$

后面的讨论中，为了简洁，我们会在表中略去之前这部分相同的局面。

情况 1. i 为偶数且 $\sigma(\alpha) = x$。

此时令 $\rho'(\alpha + \{x\}) := M$。

	1	2
(σ, ρ')	x	M
(σ', ρ)		

$$\Delta = -(x - M)$$

然后根据 σ 和 ρ 的决策，如果它们取的是链外的点，我们做模仿构造。如下表：

	1	2	1	2				
(σ,ρ')	x	M	u_1	u_2	$\cdots$	$\cdots$	u_{k-1}	u_k
(σ',ρ)	u_1	u_2	$\cdots$	$\cdots$	u_{k-1}	u_k		

$\Delta = -(x-M)$

设 $\beta=\alpha+\{x,M,u_1,u_2,\ldots,u_k\}$，$\beta'=\alpha+\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$，讨论：

- 如果 k 为偶数：
  - 如果 $\sigma(\beta)\neq y$，令 $\sigma'(\beta'):=\sigma(\beta)$，$u_{k+1}:=\sigma'(\beta')$，继续。
  - 否则进入情况*1.1*。
- 如果 k 为奇数：
  - 如果 $\rho(\beta')\neq p_0$，令 $\rho'(\beta):=\rho(\beta')$，$u_{k+1}:=\rho'(\beta)$，继续。
  - 否则进入情况*1.2*。

情况 1.1. k 为偶数且 $\sigma(\beta)=y$。

此时令 $\sigma'(\beta'):=p_0$，然后 G 和 G' 的剩余点集相同，可以继续做模仿构造直到游戏结束。

	1	2	1	2			1	2	1
(σ,ρ')	x	M	u_1	u_2	$\cdots$	$\cdots$	u_{k-1}	u_k	y
(σ',ρ)	u_1	u_2	$\cdots$	$\cdots$	u_{k-1}	u_k	p_0		

$$\begin{aligned}\Delta &= p_0-(x+y-M)\\ &= (x+y-M)-(x+y-M)\\ &= 0\end{aligned}$$

此时 $\mathrm{val}_{G'}(\sigma',\rho)-\mathrm{val}_G(\sigma,\rho')=0$。

情况 1.2. k 为奇数且 $\rho(\beta')=p_0$。

此时令 $\rho'(\beta):=y$，然后 G 和 G' 的剩余点集相同，可以继续做模仿构造直到游戏结束。

	1	2	1	2			2	1	2
(σ,ρ')	x	M	u_1	u_2	$\cdots$	$\cdots$	u_{k-1}	u_k	y
(σ',ρ)	u_1	u_2	$\cdots$	$\cdots$	u_{k-1}	u_k	p_0		

$$\begin{aligned}\Delta &= (-p_0)-(x-y-M)\\ &= (-x-y+M)-(x-y-M)\\ &= 2M-2x\end{aligned}$$

此时 $\mathrm{val}_{G'}(\sigma',\rho)-\mathrm{val}_G(\sigma,\rho')=2A_M-2A_x\geq 0$。

对比情况 *1.1* 和情况 *1.2* 可以发现，其本质上就是将 y 和 p_0 看做相同的点，然后做模仿构造，以此产生的差值为 $\pm(A_{p_0}-A_y)=\pm(A_x-A_M)$，而原本的差值就是 A_M-A_x，因此不会减到小于 0。

情况 2. i 为奇数且 $\rho(\alpha)=p_0$。

此时令 $\rho'(\alpha):=x$，然后做模仿构造直到 σ 取到 M 或 ρ 取到 p_1 或 G' 被删空（回忆：$p_1,p_2,\ldots,p_l$ 指 y 和 p_0 后，链上的其它点）。

	2	1	2		
(σ,ρ')	x	u_1	u_2	$\cdots$	u_k
(σ',ρ)	p_0	u_1	u_2	$\cdots$	u_k

$$\Delta = (-p_0)-(-x)$$

设 $\beta=\alpha+\{x,u_1,\ldots,u_k\}$，$\beta'=\alpha+\{p_0,u_1,\ldots,u_k\}$。

情况 2.1. k 为偶数且 $\sigma(\beta)=M$。

此时令 $\rho'(\beta+\{M\}):=y$，然后 G 和 G' 的剩余点集相同，可以继续做模仿构造直到游戏结束。

	2	1		2	1	2
(σ,ρ')	x	u_1	$\cdots$	u_k	M	y
(σ',ρ)	p_0	u_1	$\cdots$	u_k		

$$\begin{aligned}\Delta &= (-p_0)-(M-x-y)\\ &= (M-x-y)-(M-x-y)\\ &= 0\end{aligned}$$

此时 $\mathrm{val}_{G'}(\sigma',\rho)-\mathrm{val}_G(\sigma,\rho')=0$。

情况 2.2. G' 被删空。

此时 G 中一定只剩 M, y 两个点。

如果当前轮到先手操作那么他一定取 M，也就是情况 *2.1*。下面考虑后手操作的情况。

此时令 $\rho'(\beta) := M$，然后 G 中一定只剩 y 一个点，也就是一定有 $\sigma(\beta + \{M\}) = y$。

	2	1		1	2	1
(σ, ρ')	x	u_1	$\cdots$	u_k	M	y
(σ', ρ)	p_0	u_1	$\cdots$	u_k		

$$\begin{aligned}\Delta &= (-p_0) - (y - x - M)\\ &= 2M - 2y\end{aligned}$$

此时 $\mathrm{val}_{G'}(\sigma', \rho) - \mathrm{val}_G(\sigma, \rho') = 2A_M - 2A_y \geq 0$。

情况 2.3. k 为奇数且 $\rho(\beta') = p_1$

此时令 $\rho'(\beta) := M$。

	2	1		1	2
(σ, ρ')	x	u_1	$\cdots$	u_k	M
(σ', ρ)	p_0	u_1	$\cdots$	u_k	p_1

$$\begin{aligned}\Delta &= (-p_0 - p_1) - (-x - M)\\ &= 2M - y - p_1\end{aligned}$$

然后再做模仿构造直到 σ 取到 y 或 ρ 取到 p_2 或 G' 被删空。

设此时刻之前的 G 的局面为 γ，G' 的局面为 γ'。

情况 2.3.1. σ 取到 y。

此时令 $\rho'(\gamma + \{y\}) := p_1$，然后 G 和 G' 的剩余点集相同。下表中将模仿构造的过程简略表示。

	2		2		1	2
(σ, ρ')	x	$\cdots$	M	$\cdots$	y	p_1
(σ', ρ)	p_0	$\cdots$	p_1	$\cdots$		

$$\begin{aligned}\Delta &= (-p_0) - (y - x - M)\\ &= 2M - 2y\end{aligned}$$

此时 $\mathrm{val}_{G'}(\sigma',\rho)-\mathrm{val}_G(\sigma,\rho')=2A_M-2A_y\geq 0$。

情况 2.3.2. G' 被删空。

此时 G 中一定只剩 y,p_1 两个点。

如果当前轮到先手操作那么他一定取 y，也就是情况 *2.3.1*。下面考虑后手操作的情况。

此时一定有 $\rho'(\gamma):=y$，$\sigma(\gamma+\{y\})=p_1$。

	2		2		2	1
(σ,ρ')	x	$\cdots$	M	$\cdots$	y	p_1
(σ',ρ)	p_0	$\cdots$	p_1	$\cdots$		

$$\begin{aligned}\Delta&=(-p_0-p_1)-(p_1-x-M-y)\\&=2M-2p_1\end{aligned}$$

此时 $\mathrm{val}_{G'}(\sigma',\rho)-\mathrm{val}_G(\sigma,\rho')=2A_M-2A_{p_1}\geq 0$。

情况 2.3.3. ρ 取到 p_2。

此时令 $\rho'(\gamma):=y$。

	2		2		2
(σ,ρ')	x	$\cdots$	M	$\cdots$	y
(σ',ρ)	p_0	$\cdots$	p_1	$\cdots$	p_2

$$\begin{aligned}\Delta&=(-p_0-p_1-p_2)-(-x-M-y)\\&=2M-p_1-p_2\end{aligned}$$

注意到这个情况和情况 *2.3* 的初始局面类似，只不过 Δ 变为了 $2M-p_1-p_2$ 而非 $2M-y-p_1$。

考虑维护如下状态：设 G 被移除的点集为 S，G' 被移除的点集为 S'，那么存在一个 $t\geq 2$ 满足：

- $p_t,p_{t-1}\notin S$。
- $S'\setminus\{p_0\}=(S\setminus\{x,M,y\})\cup\{p_t,p_{t-1}\}$。
- $\Delta=2M-p_{t-1}-p_t$。

如下表，即 S' 比 S 在链中多取了 p_{t-1} 和 p_t：

	2		2		2		2		2		2		2
(σ,ρ')	x	$\cdots$	M	$\cdots$	y	$\ldots$	p_1	$\ldots$	p_2	$\ldots$	p_{t-3}	$\ldots$	p_{t-2}
(σ',ρ)	p_0	$\cdots$	p_1	$\cdots$	p_2	$\ldots$	p_3	$\ldots$	p_4	$\ldots$	p_{t-1}	$\ldots$	p_t

$$\begin{aligned}\Delta &= (-p_0-p_{t-1}-p_t)-(-x-M-y)\\ &= 2M-p_{t-1}-p_t\end{aligned}$$

然后做模仿构造直到 σ 取到 p_{t-1} 或 ρ 取到 p_{t+1}，或 G' 被删空。容易证明，模仿构造不会破坏当前状态，且最后一定会进入这三种情况中的一种。

如果 ρ 取到 p_{t+1}，就令 ρ' 取到 p_{t-1}，并维持上述状态。

如果 σ 取到 p_{t-1}，就令 ρ' 再取 p_t，然后 G 和 G' 的剩余点集相同，如下表：

	2		2		2		2		2		2		2		1	2
(σ,ρ')	x	$\cdots$	M	$\cdots$	y	$\ldots$	p_1	$\ldots$	p_2	$\ldots$	p_{t-3}	$\ldots$	p_{t-2}	$\ldots$	p_{t-1}	p_t
(σ',ρ)	p_0	$\cdots$	p_1	$\cdots$	p_2	$\ldots$	p_3	$\ldots$	p_4	$\ldots$	p_{t-1}	$\ldots$	p_t	$\ldots$		

$$\begin{aligned}\Delta &= (-p_0-p_{t-1})-(-x-M-y+p_{t-1})\\ &= 2M-2p_{t-1}\end{aligned}$$

此时 $\mathrm{val}_{G'}(\sigma',\rho)-\mathrm{val}_G(\sigma,\rho')=2A_M-2A_{p_{t-1}}\ge 0$。

如果 G' 被删空，那么 G 中一定只剩 p_{t-1},p_t 两个点。如果当前轮到先手操作那么他一定取 p_{t-1}，这在前面已经讨论过。如果后手操作，那么一定有 ρ' 取 p_{t-1}，然后 σ 取 p_t，如下表：

	2		2		2		2		2		2		2		2	1
(σ,ρ')	x	$\cdots$	M	$\cdots$	y	$\ldots$	p_1	$\ldots$	p_2	$\ldots$	p_{t-3}	$\ldots$	p_{t-2}	$\ldots$	p_{t-1}	p_t
(σ',ρ)	p_0	$\cdots$	p_1	$\cdots$	p_2	$\ldots$	p_3	$\ldots$	p_4	$\ldots$	p_{t-1}	$\ldots$	p_t	$\ldots$		

$$\begin{aligned}\Delta &= (-p_0-p_t)-(-x-M-y+p_t)\\ &= 2M-2p_t\end{aligned}$$

此时 $\mathrm{val}_{G'}(\sigma',\rho)-\mathrm{val}_G(\sigma,\rho')=2A_M-2A_{p_t}\geq 0$。

至此，我们构造了 σ' 使得 $\mathrm{val}_{G'}(\sigma',\rho)\geq \mathrm{val}_G(\sigma,\rho')$，根据对比构造引理有 $\mathrm{val}(G)\leq \mathrm{val}(G')$。

同理可以构造关于后手的策略，来证明 $\mathrm{val}(G)\geq \mathrm{val}(G')$。

关于后手，这里给出一个其它证明。添加一个点 s 指向原图的所有点，除了这条链中不为链首的点。设对 G 这样操作得到的图为 H，G' 得到的图为 H'，那么 $\mathrm{val}(H)=A_s-\mathrm{val}(G)$，$\mathrm{val}(H')=A_s-\mathrm{val}(G')$，且这条链在 H,H' 中均保留。则 $\mathrm{val}(H)\leq \mathrm{val}(H')$，即 $\mathrm{val}(G)\geq \mathrm{val}(G')$。

综上，$\mathrm{val}(G)=\mathrm{val}(G')$。

□

3.3.3 劣势移动定理

引理 5. *考虑一条链 $\{x,M\}$，满足 $A_M\geq A_x$。*

对两名玩家来说，都存在一个最优策略，使得他只可能在图中只剩恰好两个点 x,M，也就是必须取 x 时取到 x。

证明. 先证明先手。

应用对比构造引理。设 σ 为 G 的任一先手最优策略，考虑构造一个先手策略 σ'，满足对比构造引理，并只在必须取 x 时取到 x。

设 ρ 为与 σ' 对抗的策略，ρ' 为与 σ 对抗的辅助策略。

不失一般性地假设 $\sigma(\epsilon)=x$（ϵ 为空序列），此时令 ρ' 取 M。

	1	2
(σ,ρ')	x	M
(σ',ρ)		

$$\Delta=-(x-M)$$

然后做模仿构造，直到上方游戏被删空（即下方游戏只剩 x,M 两个点），或 ρ 取到 x。

情况 1. *上方游戏被删空。*

此时下方一定轮到先手，σ' 只能取 x，然后 ρ 只能取 M。

	1	2		1	2
(σ, ρ')	x	M	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
(σ', ρ)	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	x	M

$$\begin{aligned}\Delta &= (x - M) - (x - M) \\ &= 0\end{aligned}$$

此时 $\mathrm{val}_G(\sigma', \rho) - \mathrm{val}_G(\sigma, \rho') = 0$。

情况 2. ρ 取到 x。

此时令 σ 取 M，然后两个游戏剩余点集相同。

	1	2		2	1
(σ, ρ')	x	M	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
(σ', ρ)	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	x	M

$$\begin{aligned}\Delta &= (M - x) - (x - M) \\ &= 2M - 2x\end{aligned}$$

此时 $\mathrm{val}_G(\sigma', \rho) - \mathrm{val}_G(\sigma, \rho') = 2A_M - 2A_x \geq 0$。

我们构造出了一个满足给定限制的 σ'，根据对比构造引理，σ' 是 G 的先手最优策略。同理，对后手也存在一个这样的最优策略。

□

定理 6 (劣势移动定理)**.** 考虑一条链 $\{x, M\}$，满足 $A_M \geq A_x$。

设 G' 为 G 在去掉 x, M 后得到的图，那么 $\mathrm{val}(G) = \mathrm{val}(G') + (-1)^n(A_x - A_M)$，其中 n 表示 G 的点数。

证明. 设 σ, ρ 分别为先后手的一个满足引理 5 中条件的最优策略。

对图中所有点 $u \neq x, M$，从 u 到 x 连一条边，设这样得到的图为 H。

那么 $\sigma, \rho \in \mathrm{valid}^\star(H)$，根据引理 2，$\mathrm{val}(G) = \mathrm{val}(H)$。

在 H 中，x, M 一定是最后取的两个点。可以发现 G' 也是 H 去掉这两个点后得到的图，那么显然有 $\mathrm{val}(H) = \mathrm{val}(G') + (-1)^n(A_x - A_M)$。

所以 $\mathrm{val}(G) = \mathrm{val}(H) = \mathrm{val}(G') + (-1)^n(A_x - A_M)$。

□

3.3.4 归并定理

引理 7. 如果存在两条点集不交的链 $\{x_1, x_2, \ldots, x_{l_1}\}$，$\{M_1, M_2, \ldots, M_{l_2}\}$，满足 $A_{M_1} \geq A_{x_i}$（$1 \leq i \leq l_1$），$A_{M_1} \geq A_{M_j}$（$1 \leq j \leq l_2$），那么对两个玩家来说，都存在一个最优策略，满足在 x_1 和 M_1 同时可操作时，不会选择 x_1。

证明. 先证明先手。

应用对比构造引理。设 σ 为 G 的任一先手最优策略，考虑构造一个先手策略 σ'，满足对比构造引理，并满足：在 x_1 和 M_1 同时可操作时，不会选择 x_1。

设 ρ 为与 σ' 对抗的策略，ρ' 为与 σ 对抗的辅助策略。

不失一般性地假设初始 x_1, M_1 皆可操作，且 $\sigma(\epsilon) = x_1$，此时令 σ' 取到 M_1。

	1
(σ, ρ')	x_1
(σ', ρ)	M_1

$\Delta = M_1 - x_1$

设 S 为上方游戏被移除的点集，S' 为下方游戏被移除的点集。

维护以下状态：存在 $i, j \geq 1$ 使得：

- $x_i \in S, M_j \in S'$。
- $S \setminus \{x_i\} = S' \setminus \{M_j\}$。
- $\Delta = 2M_1 - x_i - M_j$。

即上方游戏比下方游戏多取了 x_i，下方游戏比上方游戏多取了 M_j。

设 $T = S \setminus \{x_i\} = S' \setminus \{M_j\}$。

下表展示了需要维护的状态，标出了每个游戏被移除的点集。

(σ, ρ')	$\cdots \quad (T \cup \{x_i\})$
(σ', ρ)	$\cdots \quad (T \cup \{M_j\})$

$\Delta = 2M_1 - x_i - M_j$

初始时 $i = j = 1$。

做模仿构造直到 σ 取到 x_{i+1} 或 M_j，或 ρ 取到 M_{j+1} 或 x_i。容易证明，模仿构造不会破坏当前状态，且最后一定会进入这四种情况中的一种。

情况 1. σ 取到 x_{i+1}。

此时令 σ' 取 x_i，如下表：

			1
(σ,ρ')	$\cdots$	$(T\cup\{x_i\})$	x_{i+1}
(σ',ρ)	$\cdots$	$(T\cup\{M_j\})$	x_i

$$\begin{aligned}\Delta &= 2M_1 - x_i - M_j + x_i - x_{i+1}\\ &= 2M_1 - x_{i+1} - M_j\end{aligned}$$

维持了上面维护的状态，继续。

情况 2. σ 取到 M_j。

此时令 σ' 取 x_i，如下表：

			1
(σ,ρ')	$\cdots$	$(T\cup\{x_i\})$	M_j
(σ',ρ)	$\cdots$	$(T\cup\{M_j\})$	x_i

$$\begin{aligned}\Delta &= 2M_1 - x_i - M_j + x_i - M_j\\ &= 2M_1 - 2M_j\end{aligned}$$

两个游戏的剩余点集相同，可以继续做模仿构造直到游戏结束。

有 $\mathrm{val}_G(\sigma',\rho) - \mathrm{val}_G(\sigma,\rho') = 2A_{M_1} - 2A_{M_j} \geq 0$。

情况 3. ρ 取到 M_{j+1}。

此时令 ρ' 取 M_j，如下表：

			2
(σ,ρ')	$\cdots$	$(T\cup\{x_i\})$	M_j
(σ',ρ)	$\cdots$	$(T\cup\{M_j\})$	M_{j+1}

$$\begin{aligned}\Delta &= 2M_1 - x_i - M_j + M_j - M_{j+1}\\ &= 2M_1 - x_i - M_{j+1}\end{aligned}$$

维持了上面维护的状态，继续。

情况 4. ρ 取到 x_i。

此时令 ρ' 取 M_j，如下表：

			2
(σ,ρ')	$\cdots$	$(T\cup\{x_i\})$	M_j
(σ',ρ)	$\cdots$	$(T\cup\{M_j\})$	x_i

$$\begin{aligned}\Delta &= 2M_1 - x_i - M_j + M_j - x_i\\ &= 2M_1 - 2x_i\end{aligned}$$

两个游戏的剩余点集相同，可以继续做模仿构造直到游戏结束。

有 $\mathrm{val}_G(\sigma',\rho)-\mathrm{val}_G(\sigma,\rho')=2A_{M_1}-2A_{x_i}\geq 0$。

我们构造出了一个满足给定限制的 σ'，根据对比构造引理，σ' 是 G 的先手最优策略。同理，对后手也存在一个这样的最优策略。

□

引理 8. 如果存在两条点集不交的链 $\{x_1,x_2,\dots,x_{l_1}\}$，$\{M_1,M_2,\dots,M_{l_2}\}$ 满足引理 7 的条件，且满足如下条件之一：

- x_1,M_1 初始可操作。
- 存在一个点 u，满足 x_1,M_1 的入度均为 1，且都来自 u。

那么可以连一条 M_1 到 x_1 的边，$\mathrm{val}(G)$ 不变。

在连边后，如果存在满足上述要求的 u，可以再断掉 u 到 x_1 的边，$\mathrm{val}(G)$ 不变。

证明. 根据引理 7，对先后手分别存在最优策略 σ,ρ，满足：在 x_1,M_1 同时可操作时，不会选择 x_1。

容易证明，只要 x_1,M_1 都没被移除，那么它们要么同时可操作，要么同时不可操作。

所以 σ,ρ 都不会在移除 M_1 之前移除 x_1。

设 G' 为连一条 M_1 到 x_1 的边后得到的图，那么 $\sigma,\rho\in\mathrm{valid}^\star(G')$。

根据引理 2，$\mathrm{val}(G)=\mathrm{val}(G')$。

如果存在满足上述要求的 u，那么在 G' 中断掉 u 到 x_1 的边不会改变 $\mathrm{top}(G')$，因而 $\mathrm{val}(G)$ 不变。

□

定理 9 (归并定理)**.** *如果存在两条点集不交的链* $\{x_1, x_2, \ldots, x_{l_1}\}$,$\{M_1, M_2, \ldots, M_{l_2}\}$ *满足引理 8 的条件，且对于所有* $1 \le i \le l_1$ *有* $A_{x_i} \ge A_{x_{i+1}}$*，对于所有* $1 \le j < l_2$ *有* $A_{M_j} \ge A_{M_{j+1}}$*，那么可以将这两条链归并排序为一条从前到后点权不增的链。*

证明. 对 x_1 和 M_1 应用引理 8，操作后：

- 如果 $l_2 = 1$，那么归并完成。
- 否则，根据 A_{x_1} 和 A_{M_2} 的大小关系，可以对 x_1 和 M_2（或调换顺序）应用引理 8，以此类推。

容易证明对引理 8 的应用总是满足条件，且最后会将两条链归并排序。

□

3.4 算法

对于一棵有根树森林 G，边从父亲连向儿子，可以将 G 本身或其中任意一棵子树替换为一条权值从前到后不增的链。下称这样的链为**单调链**。

考虑任意一个节点 u，我们想把以 u 为根的子树替换为一条单调链。

首先，递归地将 u 的所有子树替换为单调链。

然后使用归并定理，可以将 u 的所有儿子归并为一条单调链，$\mathrm{val}(G)$ 不变。

这样以 u 为根的子树本身成为了一条链，设这条链为 $u_1, u_2, \ldots, u_k$。对所有 $2 \le i < k$ 都有 $A_{u_i} \ge A_{u_{i+1}}$。

重复以下过程直到 $k \le 1$ 或 $A_{u_1} \ge A_{u_2}$：

- 如果 $k \ge 3$，那么使用融合定理将 u_1, u_2, u_3 合并为一个点，点权为 $A_{u_1} + A_{u_3} - A_{u_2}$，$\mathrm{val}(G)$ 不变。
- 否则 $k = 2$，那么使用劣势移动定理将 u_1, u_2 删除，设删除后得到的图为 H，G 的点数为 n，那么 $\mathrm{val}(G) = \mathrm{val}(H) + (-1)^n(A_{u_1} - A_{u_2})$。

将 G 中所有有根树替换为单调链后，可以再使用归并定理将所有单调链归并，$\mathrm{val}(G)$ 不变。

时间复杂度：朴素的实现可以做到 $O(n^2)$，使用平衡树等数据结构可以做到 $O(n \log n)$ 或 $O(n \log^2 n)$。

四、 参考资料

[1] Tomasz Idziaszek, An Optimal Algorithm for Calculating the Profit in the Coins in a Row Game, https://www.mimuw.edu.pl/~idziaszek/termity/termity.pdf