千百 (hundredsofthousands) 解题报告

题目大意

n 个数排成一个圆环，从 0 开始编号，第 i 个数为 a_i。你需要进行若干次操作使得对于任何 i，有 $a_i \times a_{(i+1) \bmod n} < 0$。每次操作时，你可以选取一个 i，将 $a_{(i-1) \bmod n}$ 和 $a_{(i+1) \bmod n}$ 同时减去 a_i，然后将 a_i 变为 $-a_i$。问至少需要多少次操作。有 m 次询问，询问的内容是如果初始时同时将 a_i 和 $a_{(i+1) \bmod n}$ 加上 v，则上述问题的答案会变成什么。询问互相独立。

数据范围

$3 \le n \le 10^5$，$1 \le m \le 10^5$，$0 \le p < n$，$|v|, \sum |a_i| \le 10^8$。保证所有给出的数均为整数。

时间、空间限制：3 s / 512 MB

解题过程

首先观察对结果的要求，$a_i \times a_{(i+1) \bmod n} < 0$。可以发现这等价于最终的数列是正负交替的、不能有 0。同时，我们也可以特判排除掉 n 为奇数的情况，因为 n 为奇数时一个环形的数列不可能做到相邻两个数的符号均不同。

下面再来考虑每次操作干的事情。其相当于将 a_{i-1}, a_i, a_{i+1} 分别减去 $a_i, 2a_i, a_i$。观察到这一过程中，数列的奇数项和与数列的偶数项和是不变的。进一步，我们考察每个前缀的奇项与偶项之差，即 $b_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j a_j$。操作 i 时，对 b 数列的影响是将 b_{i-1}, b_i, b_{i+1} 变为 b_i, b_{i-1}, b_{i+1}，即交换 b 中两数。而原限制在 b 上的体现就是 b 严格单调递增或严格单调递减。

但是上述分析仅适用于操作位置在 $[1, n-2]$ 内的情况。操作边界时，由于数列构成环，上述分析就不成立了。我们依然考虑断环为链，但是将链向两方向延展，以使得操作不会遇到边界问题。即构造数列 a'，定义 $a'_i = a_{i \bmod n}$，并允许 a' 下标成为负数。同理，构造数列 b' 为 a' 从第 0 项开始的奇项与偶项之差，也允许其下标成为负数。我们记所有下标与 i 在同一个模 n 的同余系内的位置为一个下标族。此时不难发现，在 a_i 上的操作在 a' 上体现为同时操作第 i 族内的所有位置，在 b' 上体现为交换第 i 族和第 $i-1$ 族。于是我们的问题就转化成了每次可以交换相邻的两族，需要给序列排序。

这与经典的排序交换次数问题基本相同了。我们类似逆序对计数地统计两两族之间要交换几次即可。其中，两个族之间的可能要交换多次，直到这两个族构成的子序列单调。

考虑证明这个结论：设 $c_{i,j}$ 表示我们计算的第 i 族与第 j 族间交换次数。我们首先可以通过原序列奇偶项差得知最终 b' 是单增还是单减，所以不妨再假设最终 b' 序列单调递增。我们每次选择相邻的且逆序的两族进行交换，直至序列有序。由于交换时必逆序，因此此时两两族间交换次数就是 $c_{i,j}$。此证得上界。单独拿出两族，可以发现它们之间至少要交换 $c_{i,j}$ 次。此证得下界。

由于每个族中相邻两数的差都相等（一定是原序列奇偶项的差），因此 $c_{i,j}$ 可以通过简单的讨论，变为形如 $\left\lfloor \frac{|b_i - b_j| + \Delta}{b_n} \right\rfloor$ 的式子。于是问题依然是一个离线的二维偏序。

再考虑询问造成的变化，在 b' 上的体现不过是将一个族内的所有元素同时加 v（或 $-v$）。所以加入多次独立询问后就变成了在线的二维偏序问题，不难使用树套树或离线分治[1]求解。时间复杂度 $O(n \log^2 n)$。

参考资料

改编自一道校内模拟赛题。

[1] 陈丹琦, 从《Cash》谈一类分治算法的应用