

小 P 爱学习 解题报告

H6_6Q

题目大意

给定 nm 个数 $a_1, a_2, \dots, a_{nm}$ ，将这些数分成若干组使得每组大小为 m 的倍数，每个数都在且仅在一个组 G 内。

定义一个合法的分组方案 P 的权值为 $\prod_{G \in P} \sum_{x \in G} a_x$ 。

求所有分组方案的权值和对 $10^9 + 7$ 取模的结果。

$1 \leq n \leq 1500, 1 \leq m \leq 100$

算法 1

对于 $n, m \leq 4$ 的部分。

由于 $nm \leq 16$ ，故可直接使用朴素的状压 dp 或者一些剪枝优秀的搜索通过。

期望得分 10 分。

算法 2

对于 $m = 1$ 的部分。

首先赋予每个分组方案的权值组合意义，相当于是在每组中都要选出一个数并乘起来，求所有选法的权值和。

反过来，如果我们知道每组中选择了哪个数，那么这些数的乘积对答案的贡献系数就是有多少种分组方法使得每组有且仅有一个选出的数。

因为所有数都是等价的，所以这个系数只与选择出的数的个数有关，设选出了 b 个数，这个系数为 $f(b)$ 。

现在考虑如何对 $b \in [1 \sim n]$ 计算 $f(b)$ 。

由于 $m = 1$ ，那么 $f(b)$ 等价于把 $n - b$ 个有标号球放入 b 个有标号盒子里，盒子可以为空的方案数。那么我们可以得出 $f(b) = b^{n-b}$ 。

知道 $f(b)$ 后，选出了几个数可以直接简单背包 dp 在 $O(n^2)$ 的时间复杂度内解决这个部分。

结合算法 1 中的暴力后期望得分 30。

算法 3

对于 $n \leq 500$ 的部分。

现在问题的关键是如果 m 是一个任意值，那么 $f(b)$ 如何计算。

同上可以得出 $f(b)$ 等价于将 $nm - b$ 个有标号球放入 b 个盒子中，盒子可为空且每个盒子内球数 $\bmod m = m - 1$ 的方案数。

由于这个看上去不是很优美，所以可以改成将 nm 个有标号球放入 b 个盒子中，盒子不可为空且每个盒子内球数 $\bmod m = 0$ 但是每个盒子中第一个球不参与标号的方案数。

考虑动态规划，可以设计出一个状态 $dp_{i,j}$ 表示将 jm 个有标号球放入 i 个盒子中合法的方案数乘上 $\frac{1}{(jm-i)!}$ 。

那么每次新插入一个盒子时可枚举盒子的大小得到转移：

$$dp_{i,j} = \sum_k dp_{i-1,j-k} \times \frac{1}{(km-1)!}$$

最后 $f(b) = dp_{n,b} \times (nm-b)!$ 。

这部分 dp 的复杂度为 $O(n^3)$ ，结合前面的背包，总时间复杂度为 $O(n^2m + n^3)$ 。

结合算法 1 和算法 2 期望得分 60 分。

算法 4

对于无特殊限制的部分。

依然考虑优化求 $f(b)$ 的过程。

可以设出一个常量 B ，然后将 dp 分成三部分，第一部分处理大小 $\leq B$ 的盒子，第二部分处理大小 $> B$ 的盒子，第三部分将前两部分的结果合并。

对于第一部分的 $dp1$ ，由于只增加大小 $\leq B$ 的盒子，那么转移的过程中只需要枚举 $O(B)$ 而不是 $O(n)$ ，故这部分时间复杂度为 $O(n^2B)$ 。

对于第二部分的 $dp2$ ，由于只增加大小 $> B$ 的盒子，一共最多选出 $O(\frac{n}{B})$ 个盒子而不是 $O(n)$ ，故这部分时间复杂度为 $O(\frac{n^3}{B})$ 。

对于第三部分，在计算 $f(b)$ 的时候，我们可以枚举第二部分的 dp 选了 i 个盒子，第二部分的 dp 放入 j 个球，那么有：

$$f(b) = \sum_i \sum_j dp1_{b-i,n-j} dp2_{i,j} \frac{b!}{i!(b-i)!}$$

由于 i 只需要枚举到 $O(\frac{n}{B})$ ，所以这部分时间复杂度为 $O(\frac{n^3}{B})$ 。

取 $B = n^{0.5}$ 时，时间复杂度为 $O(n^{2.5})$ 。

结合前面的背包 dp，总时间复杂度为 $O(n^2m + n^{2.5})$ 。

使用一些简单的卡常即可期望得到 100 分。