第一代图灵机(machine)：解题报告

时间限制：2s

空间限制：1024MB

前言

正如题面的背景所说，本题灵感来自于洛谷P5251 第二代图灵机。

原题的做法是珂朵莉树暴力维护，由于修改是区间推平且数据随机故期望复杂度正确即可。而本题似乎完全变成了另一道题。

出题人很菜，验题的人也并不算多，也许会有踩标算的做法?

题目大意

给出一个长度为 n 的非负数字序列 $a_{1\dots n}$，每个数字有一个 $[1,m]$ 的颜色 c_i，要求进行 q 次操作，操作分为两类:

`1 l r`：询问区间 $[l,r]$ 中没有重复颜色且数字和最大的子区间的数字和。

`2 i w`：把 c_i 修改为 w。

数据范围

对于 10% 的数据，$n,q\le 5000$；

对于另外 10% 的数据，$m\le 10$；

对于另外 20% 的数据，没有第二种操作；

对于另外 20% 的数据，$n,q\le 5\times 10^4$；

对于所有数据，$1\le m\le n\le 2\times 10^5,q\le 2\times 10^5,c_i\in[1,m],a_i\ge 0$。

解题过程

算法一 ($n,q\le 5000$)

每次询问从左到右枚举右端点，维护当前合法的最靠左的左端点即可。

时间复杂度 $O(qn)$。

算法二 ($m\le 10$)

合法的区间应该长度 $\le m$。考虑线段树维护，每次合并信息的时候暴力把分界点前后各长度为 m 的区间拿出来扫一遍即可。

合并复杂度 $O(m)$，总复杂度 $O(m\log n)$。

算法三（没有修改操作）

设 $sum_i=\sum_{j=1}^i a_j$， pre_i 表示 i 前面第一个与 i 同色的位置，pos_i 表示以 i 为右端点罪靠左的合法左端点，$pos_i=\max_{j\le i} pre_i$。

那么对于一个询问 $[l,r]$，考虑内部的右端点 R 可能有两种情况：

1. $pos_R<l$： 此时答案即为 sum_i-sum_{l-1}。
2. $pos_R\ge l$，此时答案为 $sum_R-sum_{pos_R-1}$。

二分出两种情况的分界点，第一种直接算，第二种也就是对于一个固定数列区间求最值，都是平凡的。

时间复杂度 $O((n+q)\log n)$。

$n,q\le 5\times 10^4$

该部分分留给实现不优秀的 $O(n\log^2 n)$ 算法和（可能存在？）的根号算法。

算法四（正解）

考虑继承算法三的思想。

现在的问题就是如何带修。把 (pre_i,i) 看成一个限制：$r\ge i\to l>pre_i$ 。带修本质上也就相当于删除一些限制再加入一些限制。

由于限制对 pos 贡献的形式是类似于取 $\max$ 的操作，撤销较为不易。考虑处理得到每个限制的存在时间区间，通过线段树分治便只需要支持加限制而不必删除了。

这样问题就简单多了，每个限制都相当于对 pos 数组的后缀取 $\max$，线段树维护即可，每次二分找到对应区间整体推平即可。对于询问，还是与算法三相同的方法，在线段树上二分找到两种情况的分界点，然后分别考虑就行了。

由于线段树分治，所以需要让线段树支持撤销。

时间复杂度 $O((n+q)\log^2 n)$。

参考资料

[洛谷P5251 第二代图灵机]