《朝圣道》命题报告

福建省厦门双十中学　任舍予

2022 年 10 月 27 日

目录

1 题目描述

给定一个数轴，你初始时位于原点。

每一单位时间内，你将分别以 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ 的概率向左移动一个单位长度、不动、向右移动一个单位长度。

有 T 次询问，每次询问给定 n，求 n 个单位时间后位移大小（即所在位置坐标的绝对值）的期望对 p 取模的结果。

2 数据范围

对于所有测试数据，满足 $3 \le p \le 10^6$，$1 \le T \le 10^6$，$1 \le n \le 10^{18}$，保证 p 为奇数。

每个子任务的具体限制如下表所示：

<table>
<tr><th>子任务编号</th><th>分值</th><th>$p \le$</th><th>$T \le$</th><th>$n \le$</th><th>特殊性质 A</th><th>特殊性质 B</th></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td rowspan="7">10^6</td><td rowspan="2">10^6</td><td>12</td><td rowspan="2">否</td><td rowspan="2">否</td></tr>
<tr><td>2</td><td>8</td><td>3000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>12</td><td>1</td><td rowspan="2">$\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$</td><td rowspan="3">是</td><td rowspan="4">是</td></tr>
<tr><td>4</td><td>18</td><td rowspan="3">10^6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>14</td><td rowspan="5">10^{18}</td></tr>
<tr><td>6</td><td>12</td><td rowspan="4">否</td></tr>
<tr><td>7</td><td>8</td><td>1</td><td rowspan="3">否</td></tr>
<tr><td>8</td><td>16</td><td>10^4</td><td>10^4</td></tr>
<tr><td>9</td><td>8</td><td>10^6</td><td>10^6</td></tr>
</table>

特殊性质 A：p 是素数。

特殊性质 B：$p = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$，其中 $p_1, p_2, \ldots, p_k$ 是两两不同的素数。

3 解题过程

3.1 算法一

直接搜索，每一步枚举三种情况，在搜索的过程中记录位置与概率。由乘法原理知，达到某一个状态的概率为每一步的概率之积。之后根据期望的定义公式直接计算即可。

在搜索的过程中需要将概率乘 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{4}$，由 p 为奇数知，2 和 4 在模 p 意义下的逆元存在，不难用 exgcd 等算法求出。

由于询问次数较多，需要预处理出所有 n 对应的答案。

时间复杂度 $O(3^n + T)$，期望得分：4。

3.2 算法二

考虑 DP，设 $f_{i,j}$ 表示第 i 步位于 j 的概率。不难得出转移如下：

$$f_{i,j}=\begin{cases}[j=0] & i=0\\ \frac{1}{4}f_{i-1,j-1}+\frac{1}{2}f_{i-1,j}+\frac{1}{4}f_{i-1,j+1} & i\ge 1\end{cases}$$

答案即为 $\sum_j |j|\times f_{n,j}$。

注意到仅当 $j\in[-n,n]$ 时 $f_{n,j}>0$，因此可以在 $O(n^2)$ 时间内求出所有非 0 的 DP 值。类似于算法一，预处理出所有 n 对应的答案即可。

时间复杂度 $O(n^2+T)$，期望得分：12。

3.3 算法三

上述 DP 形式不难想到从生成函数角度进行优化。

定义形式幂级数 $F_i(x)=\sum_{j=-i}^{i} f_{i,j}x^{i+j}$。可以得到 F_i 的递推式如下：

$$F_i(x)=\begin{cases}1 & i=0\\ \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)F_{i-1}(x) & i\ge 1\end{cases}$$

不难得出通项公式：$F_n(x)=4^{-n}(1+x)^{2n}$。故答案即为：

$$\begin{aligned}\sum_{i=-n}^{n}|i|\times f_{n,i}&=\sum_{i=-n}^{n}|i|\times[x^{n+i}]F_n(x)\\&=\sum_{i=-n}^{n}|i|\times 4^{-n}\times\binom{2n}{n+i}\end{aligned}$$

预处理组合数后即可在 $O(n)$ 时间内求出一个 n 对应的答案。

对于 p 为素数且 $n\le\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$ 的情况，预处理阶乘与阶乘的逆元即可快速求出组合数。

时间复杂度 $O(p+Tn)$，期望得分：12。

3.4 算法四

考虑直接从组合意义入手：将每一步拆为两小步，每一小步以相等的概率向左或向右走 $\frac{1}{2}$ 个单位长度。不难发现，每一步向左、不动、向右的概率恰好为 $\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$。因此问题可以转化为：走 $2n$ 步，每步以相等的概率向左或向右移动 $\frac{1}{2}$ 个单位长度，求最终位置绝对值的期望。

考虑计算到达位置 i 的概率，设向左走了 L 步，向右走了 R 步，不难列出方程组：

$$\begin{cases}L+R=2n\\ \frac{1}{2}(R-L)=i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L=n-i\\ R=n+i\end{cases}$$

而向左走 $n-i$ 步，向右走 $n+i$ 步的概率即为 $2^{-2n}\times\binom{2n}{n+i}$。故答案即为：

$$\sum_{i=-n}^{n} |i| \times 2^{-2n} \times \binom{2n}{n+i}$$

与算法三得到了相同的结果。

3.5 算法五

考虑直接对上述带有组合数的式子进行代数变形：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-n}^{n} |i| \times 4^{-n} \times \binom{2n}{n+i} &= 4^{-n} \times 2\sum_{i=1}^{n} i\binom{2n}{n+i} \\
&= 4^{-n} \times 2\left(\sum_{i=1}^{n}(n+i)\binom{2n}{n+i} - \sum_{i=1}^{n} n\binom{2n}{n+i}\right) \\
&= 4^{-n} \times 2\left(\sum_{i=1}^{n} 2n\binom{2n-1}{n+i-1} - \sum_{i=1}^{n} n\binom{2n}{n+i}\right) \\
&= 4^{-n} \times n\left(2\sum_{i=1}^{n} 2\binom{2n-1}{n+i-1} - \sum_{i=1}^{n} 2\binom{2n}{n+i}\right) \\
&= 4^{-n} \times n\left(2\sum_{i=1}^{n}\left(\binom{2n-1}{n+i-1} + \binom{2n-1}{n-i}\right) - \sum_{i=1}^{n} 2\binom{2n}{n+i}\right) \\
&= 4^{-n} \times n\left(2 \times 2^{2n-1} - \left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)\right) \\
&= 4^{-n} \times n \times \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

对于 p 为素数且 $n \le \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ 的情况，类似于算法三，预处理阶乘与阶乘的逆元即可快速求出组合数，4^{-n} 可以利用快速幂或光速幂求出。

时间复杂度 $O(p+T) \sim O(p + T\log n)$，期望得分：30。

值得一提的是，存在一种超几何函数的做法能够推出同样的结果，由于篇幅有限，在此不再赘述。

3.6 算法六

当 p 为素数且 $n > \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ 时，可以使用 Lucas 定理求出组合数对 p 取模的结果。而 4^{-n} 可以通过费马小定理与光速幂以降低时间复杂度。

时间复杂度 $O(p + T\log n)$，期望得分：44。

3.7 算法七

对于特殊性质 B，考虑对于每个素数 p_i 求出以上答案，之后用中国剩余定理 CRT 进行合并。

时间复杂度 $O(p+T\log n)$，期望得分：56。

3.8 算法八

考虑推广算法七，只需要求出素数幂处的答案。

记 $v_p(n!)$ 表示 $n!$ 中含有的素数 p 的幂次。

记 $(n!)_p=\prod_{i=1}^{n} i^{[p\nmid i]}$，即 $1\sim n$ 中所有不是 p 的倍数的数的乘积。

定理 1 (Legengre 定理)**.** $v_p(n!)=\sum_{i=1}^{+\infty}\lfloor\frac{n}{p^i}\rfloor$。

证明. 考虑 $1\sim n$ 中所有 p 的倍数 $p,2p,\dots,\lfloor\frac{n}{p}\rfloor p$，每个数除以一个 p 后只需计算 $\lfloor\frac{n}{p}\rfloor!$ 中 p 的幂次，即 $v_p(n!)=\lfloor\frac{n}{p}\rfloor\times v_p(\lfloor\frac{n}{p}\rfloor!)$，根据归纳法不难得出 $v_p(n!)=\sum_{i=1}^{+\infty}\lfloor\frac{n}{p^i}\rfloor$。 □

定理 2 (Wilson 定理)**.** p 为奇素数时，$(p-1)!\equiv-1\pmod p$。

证明. 考虑将 $1\sim p-1$ 进行配对。根据欧拉定理，$1,2,\dots,p-1$ 都存在唯一的逆元，其中仅有 1 与 $p-1$ 的逆元为本身。将每个数与其逆元进行配对，特别地，将 1 与 $p-1$ 进行配对。则 $(p-1)!\equiv1\times(p-1)\equiv-1\pmod p$。 □

定理 3 (Wilson 定理的推广)**.** p 为奇素数，q 为正整数时，$(p^q!)_p\equiv-1\pmod{p^q}$。

证明. 同样可以考虑配对，由于关于 1 在模 p^q 意义下有仅两个二次剩余 ±1，因此 $(p^q!)_p\equiv 1\times(-1)\equiv-1\pmod{p^q}$。 □

推论 1. p 为奇素数，q 为正整数时，对于任意非负整数 n，$(n!)_p\equiv(-1)^{\lfloor n/p^q\rfloor}((n\bmod p^q)!)_p \pmod{p^q}$

证明. 将 $1\sim n$ 划分为 $1\sim p^q$，$p^q+1\sim 2p^q$ 等若干段。由 Wilson 定理的推广知，每一段完整段的乘积为 -1，非完整段的部分在模 p^q 意义下即为 $((n\bmod p^q)!)_p$。 □

定义 $f(n)=n!\times p^{-v_p(n!)}\bmod p^q$，即 $n!$ 除去所有素因子 p 后的乘积。考虑类比 Legengre 定理的证明过程求出 $f(n)$：

$$f(n)=(n!)_p\times f(\lfloor\frac{n}{p}\rfloor)\bmod p^q$$

由推论 1 知，在预处理出 $(1!)_p\sim(p^q!)_p$ 后，可以在 $O(1)$ 时间内计算 $(n!)_p$，于是可以在 $O(\log_p n)$ 时间内求出 $f(n)$。

考虑如何求出 $\binom{n}{m}\bmod p^q$。设 $\binom{n}{m}=a\times p^b$，其中 $p\nmid a$，$b\in\mathbb{N}$。

由 $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 得：

$$\begin{cases}a=f(n)\times f(m)^{-1}\times f(n-m)^{-1}\bmod p^q\\ b=v_p(n!)-v_p(m!)-v_p((n-m)!)\end{cases}$$

根据 Legengre 定理，可以在 $O(\log_p n)$ 的时间内计算出 b。同时预处理出所有模 p^q 意义下的逆元后即可在 $O(\log_p n)$ 的时间复杂度内计算 $\binom{n}{m} \bmod p^q$。

求出每个素数幂处的答案后不难用 CRT 进行合并。

时间复杂度 $O(p\log p + T\omega(p)\log n)$，期望得分：100。

4 命题总结

4.1 题目来源

本题来源于笔者在研究随机游走过程中对距离的探究，在适当调整形式之后得到了最基本的题目，之后通过代数手段、组合推导与数论知识对其进行了多次的修改与加强，最终得到了现有题目。在命题过程中，笔者曾在不同方面遇到过不同困难，在本题中即以部分分的形式所展现，对选手而言起到了良好的引导作用。

4.2 思路总结

本题的完整做法大致可以划分为三个阶段，第一阶段为构建 DP 算法与推导组合形式，第二阶段为化简与计算得出通项公式的封闭形式，第三阶段为运用数论手段进行求解。在第一阶段中，选手需要掌握处理概率与期望问题的基本方法，同时也需要一定的生成函数基础或组合计数手段；在第二阶段中，选手需要利用吸收恒等式对组合数进行变形，从而得到最终结果；在第三阶段中，选手需要根据数论中的常见定理进行分析与计算。由于本题的通项公式较为简洁，也存在着利用打表找规律的技巧得到通项公式的途径，对选手具有一定的启发意义。第三阶段的化简过程常被人称作 exLucas 定理，而笔者认为这一部分更需要选手的思考，不仅仅是通过记忆结论、套用做法来完成本题。

4.3 参考资料

1. 威尔逊定理 - OI Wiki，https://oi-wiki.org/math/number-theory/wilson/。
2. 卢卡斯定理 - OI Wiki，https://oi-wiki.org/math/number-theory/lucas/。

4.4 致谢

感谢林圣涵、林卓铖、江城等同学对本题命题与验题的帮助。