

加速度 (acceleration) 解题报告

题目背景

小明骑自行车去上学.....

题目描述

小明去上学的路是一条直线，直线上有 $n + 1$ 个关键位置，其中第 i 个关键位置距离家的长度为 s_i ，其中第一个关键点是家，最后一个关键点是学校。保证 $s_i < s_{i+1}$ 。

小明的自行车是这样一个装置，自行车的向前的加速度最大为 a ，但是刹车装置可以使速度瞬间降至 0 或比当前速度低的任意值。同时，自行车的速度必须时刻保持速度 $v \geq 0$ 。现在他希望尽早的到达学校，不过由于关键点上有红绿灯或是宇宙射线等因素，小明必须在时间段 $[l_i, r_i]$ 中经过第 i 个关键点，现在你需要通过规划自行车的加速和减速，使得小明在满足要求的情况下最早到达学校，如果无论如何都无法到达学校，请输出 "kaibai"（不包含引号）。

绝对误差或相对误差不超过 10^{-4} 即算正确，保证对于无解的数据，即使将任意 l_i, r_i 放大或者缩小 0.001 倍仍然无解。

输入格式

```
n a
s1 s2 ... sn+1
l1 r1
l2 r2
...
ln+1 rn+1
```

输出格式

一行一个浮点数表示答案，请注意输出的小数点后位数达到了足够的精度。

样例数据

input

```
4 2
0 2 8 10 12
0 1000000000
2 2
4 4
6 7
6 1000000000
```

output

```
6.3018239550
```

input

```
5 1
0 1 2 3 4 5
0 1000000000
1 2
2 3
3 4
4 5
5 6
```

output

```
5.0000000000
```

下载 [大样例](#)

数据约束

- $1 \leq n \leq 5000$
- $1 \leq a \leq 1000$
- $0 = s_1 < s_2 < \dots < s_{n+1} \leq 10^9$
- $l_1 = 0, r_1 = 10^9$ 和 $0 \leq l_i \leq r_i \leq 10^9$
- 所有输入中的数均为自然数。

部分分

子任务1 (30分) : 保证 $n, a, s_i, l_i, r_i \leq 10$ 。

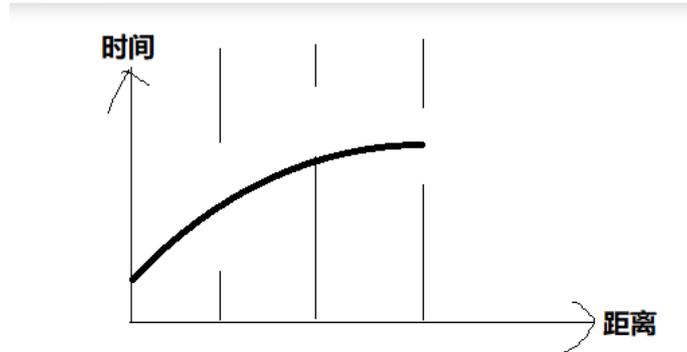
子任务2 (20分) : 保证 $r_i = 10^9$

子任务3 (30分) : 保证 $n \leq 300$

子任务4 (20分) : 无额外限制。

做法

首先考虑一下答案会是什么样子的。我们可以把离家的距离当做 x 轴，时间当做 y 轴，那么关键点就可以看做竖着的一些障碍，而运动就是一根曲线。大概会是如下的样子。



简单画几个例子可以发现，除非是在形如 (s_i, r_i) 这样的点，否则加速度没有必要不是 a 。证明可以考虑第一个非关键点加速度不是 a 的位置 P ，我们可以把 P 点的加速度提升到 a ，然后在 P 左侧一个微小的位置上减少一小点加速度（或者如果速度本来就是 0，可以等待一小段时间），这样子可以把减速调整到更左边的位置，同时在 P 右侧某个距离很近的位置时两种方案会交叉，而调整过的方案在交叉点的速度更大，于是就有了一个第一个非关键点加速度不是 a 的位置 P 更左的一个方案，矛盾，因此加速度不是 a 只会发生在关键点上（这是因为关键点不满足刚才说的调整法）。



如图，实线为路线，我们可以找到最左的可以减速的位置，减速一个很小的量，于是曲线会被调高一个很小的量，然后与原曲线交点会更右。当然如果无论如何也抬高不了曲线了，说明减速的位置上面已经撞到 r_i 了，那么自然结论还是正确的。

然后我们就可以写出尝试 dp 了，由于只在 (s_i, r_i) 的时候会加速度会出现异常，我们可以只记录到第 i 个关键点的上边界时，速度最大是多少，然后就可以转移了，转移枚举下个关键点是谁（或者直接到第 $n+1$ 个关键点，这时并不需要到 r_{n+1} ），然后就可以调整初始速度和等待时间，然后就可以判断中间会不会被阻挡了。时间复杂度 $O(n^3)$ 。

进一步的观察可以发现，初始速度和等待时间必然有一个是 0，并且实际上它们可以组成一种序关系，每个 (s_i, l_i) 的限制要求是一段区间，然后就是判断到 r_i 的初始速度和等待时间不在这些限制的并里面，于是可以优化到 $O(n^2)$ 。

参考资料

1. IOI 2022 题目: <https://ioi2022.id/tasks/>
2. NOI 大纲: <https://www.noi.cn/generic/web/viewer.html?file=/upload/resources/file/2021/04/06/152179.pdf>