

《染色》解题报告

题目大意

给定一张纸条，纸条上依次有 n 个格子，第 i 个格子的颜色是 a_i 。

现在小 A 每秒钟可以进行以下两种操作之一。

- 将某个格子染成一种颜色。
- 移动到相邻的格子，前提要求移动前和移动后的两个格子的颜色相同。

现在小 A 想在纸条上移动，但是他不想花费太多时间，所以他会询问你 Q 个问题。第 i 个问题是从格子 u_i 移动到 v_i 最少需要的时间。

注意，每个问题之间是独立的，意味着不需要真正对纸条进行染色。

数据范围

对于 100% 的数据，保证 $1 \leq u_i, v_i, a_i \leq n \leq 10^6, 1 \leq Q \leq 10^6$ 。

子任务	$n \leq$	$Q \leq$	$m \leq$	分值
1	10^4	10^2	10^2	3
2	10^5	10^5	3	13
3	5000	5000		18
4				66

解题过程

算法一

一个明显的结论是我们只会从 u 向 v 单方向移动，所以我们只用求出最少进行多少次染色即可。

所以我们可以进行朴素的基于值域的 DP。定义状态 $f_{i,j}$ 表示当前在第 i 个格子，当前格子颜色为 j 的最少染色次数。

不妨假设 $u < v$ ，则每次只会染色第 i 个格子或第 $i + 1$ 个格子。所以我们可以得到方程 $f_{i,j} = \min\{f_{i-1,k} + [j \neq a_i] + [k \neq j]\}$ 。

时间复杂度 $\mathcal{O}(Qnm)$ ，可以通过子任务 1。

算法二

对于上述 DP，显然可以写成矩阵形式，这样我们可以用线段树简单维护。

时间复杂度 $\mathcal{O}(Qm^3 \log n)$ 。可以通过子任务 2。

算法三

由于 n, m 同阶，所以我们希望得到一个只基于 n 的线性 DP。

不妨设我们求的是从 $1 \rightarrow n$ 的答案，答案一个明显的上界是 $2n - 2$ ，即每次将当前格子染成后面一格的染色，然后移动。

那么我们可以考虑求出最多有多少次染色可以不用进行。显然如果 $a_i = a_{i+1}$ 时可以用不用染色，扩展一下就是 $a_i = a_j$ 时我们可以少染色一次。

那么我们定义方程 f_i 表示从 $1 \rightarrow i$ ，最多可以少染色 f_i 次。转移方程是 $f_i = \max_{j < i} \{f_j + [a_i = a_j]\}$ ，答案可以表示为 $2n - 2 - f_n$ 。

这个 DP 已经可以优化至线性了，只用在转移时开桶记录 $a_i = c$ 的最大的 f_i 即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(Qn)$ ，可以通过子任务 3。

算法四

我们观察一下转移方程，可以发现我们等价于在求：

最多的二元组 (l_i, r_i) 个数，满足 $l_i < r_i \leq l_{i+1}$ 并且 $a_{l_i} = a_{r_i}$ 。即选出最多的不相交的满足端点颜色相同的区间。

我们先预处理出 p_i ，表示满足 $l < r \leq i$ 且 $a_l = a_r$ 的最大的 r 。那么我们从 r 开始，每次 $r \leftarrow p_r$ ，同时 $ans \leftarrow ans + 1$ 。

可以通过倍增优化这个过程，时间复杂度 $\mathcal{O}((Q + n) \log n)$ ，可以通过本题，同时代码非常简洁。

参考资料

无